ALGORITHMIC MODEL FOR ANALYSIS OF THE KALAI HYPOTHESIS IN THE CLASS OF CONVEX HULLS OF ORBITS OF WEIL'S GROUPS

Antonova S.P. (Russian Federation) Email: Antonova522@scientifictext.ru

Antonova Svetlana Pavlovna – Student,
DEPARTMENT OF FUNDAMENTAL INFORMATICS,
FACULTY OF MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES,
MORDOVIAN STATE UNIVERSITY N.P. OGAREV,
SARANSK

Abstract: *the paper is devouted an algorithmic model computation of f-vectors of the convex hulls of the Weyl groups of the series B_n, C_n, D_{2n}, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 and its applications in the 3^d Kalai hypothesis for central symmetric convex polytopes. The basis of the model is the important theorem of Vinberg on the combinatorial structure of the indicated class of polytopes.*
The interest in considering the class of polytopes $P_\lambda = conv\ (W * \lambda)$ is due to the fact that these polytopes are encountered in many questions of the theory of representation of Lie algebras and Lie groups and in convexity theorems for Hamiltonian actions of compact tori on compact symplectic manifolds. A detailed analysis of their geometric and combinatorial properties, together with answers to a number of specific questions about these properties, will apparently find application in some of the indicated branches of mathematics. This allows, in principle, to completely calculate the entire vector of faces of the convex hulls of orbits.
Keywords: *weyl group, irreducible root systems, polytope, 3^d Kalai hypothesis, dominant faces, Dynkin-Coxeter graph.*

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА ГИПОТЕЗЫ КАЛАИ В КЛАССЕ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК ОРБИТ ГРУПП ВЕЙЛЯ

Антонова С.П. (Российская Федерация)

Антонова Светлана Павловна – студент,
кафедра фундаментальной информатики, факультет математики и информационных технологий,
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
г. Саранск

Аннотация: *в работе рассматриваются алгоритмическая модель и вычисления f-векторов выпуклых оболочек орбит групп Вейля серий B_n, C_n, D_{2n}, E6, E7, E_8, F_4, G_2 её и её приложения в 3d гипотеза Калаи для выпуклых центрально симметричных многогранников. Основанием модели*

является важная теорема Винберга о комбинаторной структуре указанного класса многогранников.
Интерес к рассмотрению класса многогранников P_{λ} = conv(W^* λ) обусловлен тем, что эти многогранники встречаются во многих вопросах теории представления алгебр и групп Ли и теоремах выпуклости гамильтоновых действий компактных торов на компактных симплектических многообразиях. Детальный анализ их геометрических и комбинаторных свойств вместе с ответами на ряд конкретных вопросов об этих свойствах видимо найдет применение в некоторых указанных разделах математики. Это позволяет в принципе полностью вычислить весь вектор граней выпуклых оболочек орбит.
Ключевые слова: *Группа Вейля, неприводимые системы корней, многогранник, 3^d гипотеза Калаи, доминантные грани, граф Дынкина-Кокстера.*

Группы отражений евклидова пространства и системы корней этих групп

Пусть V – n-мерное евклидово векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Если $\alpha \in V$ -ненулевой вектор, то ортогональная этому вектору гиперплоскость H_{α} задается условием:

$H_{\alpha} = \{\beta \in V | (\alpha,\beta)=0\}$,

где (,)-скалярное произведение на V.

Отражением относительно гиперплоскости H_{α} называется ортогональное преобразование $s_{\alpha} \in O(V)$, которое задается формулой:

$$s_{\alpha}(\lambda) = \lambda - 2\left(\frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\right)\alpha,$$

где, как и выше, (,)-скалярное произведение.

Определение 1. Группой отражений называется конечная подгруппа $W \subset O(V)$ в полной ортогональной группе O(V), в которой существуют такие отражения $s_1, s_2, \ldots, s_k$, что для любого $w \in W$ верно представление $w = s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{ik}$.

Векторы α_j, где j = 1, ..., n ортогональные гиперплоскостям H_{α} отражений из группы W, образуют конфигурацию векторов пространства V, обладающую интересными геометрическими свойствами.

Назовем набор векторов указанной конфигурации **системой корней группы** W и обозначим её через Ф. Хорошо известно следующее

Предложение 1. Система корней Ф удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $\Phi \cap R_{\alpha} = \{\alpha, -\alpha\}$

2) $S_{\alpha}\Phi = \Phi$ для любого корня $\alpha \in \Phi$.

Векторы из Ф называются корнями, а система векторов пространства V, имеющая свойства 1) и 2) называется системой корней. После удаления гиперплоскостей H_{α} пространство V распадается в объединение связных компонент, задаваемых системами линейных неравенств. Эти связные компоненты называются камерами Вейля соответствующей группы отражений. Зафиксируем одну из таких камер С.

Определение 2. Корень $\alpha \in \Phi$ называется положительным корнем Ф относительно камеры С, если выполняется неравенство $(\alpha, x)>0$ для всех $x \in C$. Систему всех положительных корней относительно выбранной камеры обозначим через Ф+.

Каждая система корней Ф определяет группу отражений W, порождаемую отражениями относительно всех гиперплоскостей ортогональных положительным корням из Φ^{+}.

Свойства действия групп отражений и камеры Вейля

С целью выяснить комбинаторно-геометрическое строение камер, напомним ряд общих понятий, относящихся к произвольным конечным группам отражений конечномерного евклидова пространства. Во первых, камеры оказываются многогранными конусами в смысле следующих ниже определений.

Построим *многогранный конус* по набору векторов $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in V$, как множество всех линейный комбинаций этих векторов с неотрицательными коэффициентами:

$K = \{c_1\alpha_1 + \ldots + c_k\alpha_k \mid c_i \geq 0\}$.

Также мы можем рассмотреть еще одно множество $K^{\vee} = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha_i) \geq 0 \ \forall i\} = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \mu) \geq 0 \ \forall \mu \in K\}$, которое также является конусом. Данный конус называется *двойственным* конусу К.

Среди векторов $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ те из них, которые не являются линейными комбинациями других векторов этого списка, называются *крайними векторами* конуса К. Лучи порожденные этими крайними векторами суть ребра конуса К.

Зафиксируем в V систему положительных корней Ф+ и определим понятие простого корня.

Определение 3. Положительный корень называется *простым*, если он не является суммой двух других положительных корней.

Обозначим систему простых корней через П. Верна следующая теорема.

Теорема 1. Система простых корней П образует базис пространства, в котором расположена система корней группы отражений W.

Доказательство мы опускаем. Его изложение имеется в книгах [1] и [2].

Теперь пусть K_Π – конус, порожденный системой простых корней П. Обозначим через D двойственный конус: $D = K_\Pi^{\vee} = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) \geq 0$ для любого $\alpha \in \Pi\}$. Поскольку простые корни составляют базис пространства V, оба конуса K_Π и D симплициальны, т. е. число их ребер равно dim V, и они оба не вырожденные, т.е. не содержатся ни в каком подпространстве меньшей размерности.

Рассмотрим множество открытых конусов $w \cdot \mathrm{Int}\, D$, получающихся из Int D преобразованиями посредством элементов $w \in W$. Эти конусы совпадают с камерами Вейля группы отражений. Опуская полные доказательства (их можно найти в указанных выше книгах) перечислим нужные для данной работы свойства камер Вейля:

– для любого корня $\alpha \in \Phi$ соответствующая ему гиперплоскость H_α не пересекается ни с какой камерой Вейля $w \cdot \mathrm{Int}\, D$, полученной посредством преобразований $w \in W$;

– объединение замыканий всех камер Вейля равняется всему пространству V и пересечение замыканий двух камер Вейля либо пусто, либо является гранью каждой из них меньшей размерности. Одно из наиболее важных свойств действий групп отражений содержится в следующей теореме.

Теорема 2. 1) Группа отражений W действует на множестве камер просто транзитивно, т.е. для любых камер C_1, C_2 существует единственное преобразование $w \in W$ такое, что $w(C_1)=C_2$.

2) Орбита любой точки $\lambda \in V$ пересекает замыкание фиксированной камеры C в единственной точке.

Графы Кокстера-Дынкина

Ряд комбинаторных и метрических свойств камер описывается в терминах специальных графов, связанных с группами отражений. Более точно, пусть W — конечная группа отражений, $\Pi \subset \Phi$ – система простых корней, $|\Pi| = r$.

Определение 4. Графом Кокстера – Дынкина, построенным по группе отражений W (или по системе корней Ф), называется неориентированный граф с r вершинами (без кратных ребер и петель), ребра которого помечены целыми числами, не меньшими трех, определенный по следующим правилам:

– вершины графа Кокстера – Дынкина отвечают либо простым корням, либо стенкам фиксированной камеры ортогональных этим корням;

– i – я и j – я вершины не соединены ребром, если простые корни α_i и α_j ортогональны, или, что то же самое, простые отражения s_i и s_j коммутируют;

– в противном случае i – я и j – я вершины соединены ребром, снабженным отметкой n_{ij}, где π/n_{ij} – угол между стенками камеры, ортогональными простым корням α_i и α_j.

В случае, когда система корней не распадается в объединение двух подсистем, ортогональных друг другу, она называется *неприводимой системой корней*. Группа отражений W в этой ситуации не имеет инвариантных подпространств ненулевой размерности и называется *неприводимой кристаллографической группой отражений*. Неприводимые системы корней допускают полную классификацию, как и отвечающие им группы отражений. Сформулируем этот результат Кокстера в терминах графов Кокстера – Дынкина (см. указанную выше книгу [1]).

Теорема 3. Граф Кокстера – Дынкина любой неприводимой конечной кристаллографической группы отражений или неприводимой системы корней представляет собой один из нижеследующих графов:

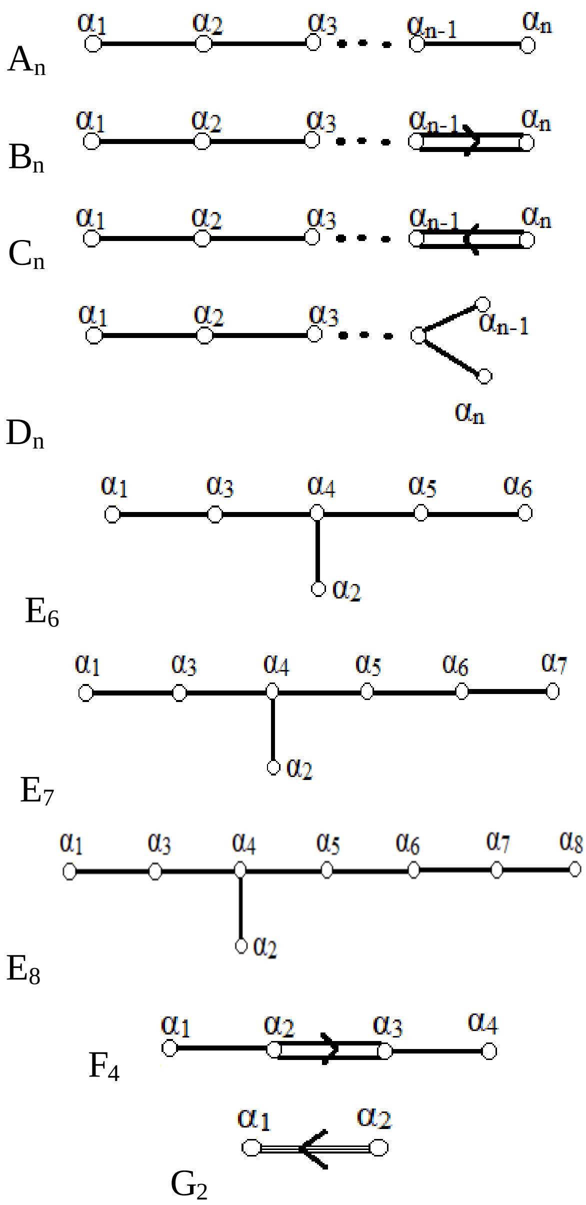

Рис. 1. Графы Кокстера – Дынкина неприводимых систем корней

f-векторы выпуклых многогранников и формулировка гипотезы Калаи

Целью данной работы является изучение, так называемой гипотезы Д. Калаи, о комбинаторной структуре центрально-симметричных многогранников в классе многогранников. Этот класс состоит из выпуклых оболочек орбит конечных групп отражений евклидовых пространств конечной размерности. Чтобы сформулировать гипотезу Калаи напомним определение вектора граней выпуклого многогранника.

Определение 5. f-вектором многогранника M называется вектор, k-я координата f_k, которого равна числу всех граней размерности k многогранника M.

В случае пространства размерности 3 f-вектор имеет следующий вид: $f = \{f_0,f_1,f_2,f_3\}$, где f_0 – количество вершин, f_1 – количество ребер, f_2 – количество граней, $f_3 = 1$– число граней максимальной размерности.

Таким образом, сумма компонент f-вектора равна общему числу всех граней любого многогранника, включая его самого.

Анализ гипотезы Калаи для орбит общего положения неприводимых конечных групп отражений евклидова пространства

Рассмотрим действие групп отражений и комбинаторику орбит этого действия в зависимости от выбора точки λ в замыкании фиксированной камеры Вейля.

Пусть $\lambda \in C$ и $P_\lambda=\mathrm{conv}(W\cdot\lambda)$ – выпуклая оболочка орбиты $W\lambda$ точки λ. Решетка граней многогранника P_λ зависит только от стабилизатора W_λ. Во-первых, введем в рассмотрение следующее множество, положив $J=\{s \in S: s(\lambda)= \lambda\}$, т.е. выделив все отражения в стабилизаторе W_λ, где S – система отражений, порождающих W, отвечающая системе простых корней. Далее анализируем случай простых многогранников P_λ, следуя Л.Реннеру (см. [3]). Такие P_λ простые многогранники допускают полное описание в зависимости от выбора точки $\lambda \in C$.

Прежде чем сформулировать классификационную теорему Л.Реннера, напомним как нумеруются элементы S в соответствии с типом группы W. Для систем корней A_n, B_n, C_n, F_4 и G_2 – это обычная нумерация. Здесь s_1 и s_n –соответствуют концевым вершинам диаграммы Кокстера – Дынкина W. Для типа E_6 концевые вершины это s_1, s_2, s_6 с $s_3s_6 \neq s_6s_3$.

Для типа E_7 концевые вершины это s_1, s_2, s_7 с $s_4s_7 \neq s_7s_4$. Для типа E_7 концевые вершины это s_1, s_2, s_8 с $s_5s_8 \neq s_8s_5$, причем для всех диаграмм типа E вершины $s_1, s_3, \ldots, s_n$ определяют единственную поддиаграмму типа A_{n-1}. Для типа D_n концевые вершины это s_1, s_{n-1}, s_n. Две поддиаграммы типа A_{n-1} в D_n это $\{s_1, s_2,\ldots,s_{n-2},s_{n-1}\}$ и $\{s_1, s_2,\ldots,s_{n-2},s_n\}$. Приведем списки подмножеств $J \subset S$, вычисленных Л.Реннером в работе [3] по типам групп Вейля, которые приводят к тому, что многогранник P_λ оказывается простым многогранником. Эти подмножества J отвечают вершинам диаграммы Кокстера – Дынкина, имеющих нулевые метки – значения координат точки λ из $\mathrm{conv}(O_\lambda)$.

Теорема 4 (Реннер). Списки подмножеств, приводящих к простым многогранникам типа P_λ, имеют нижеследующий вид для каждого типа неприводимой системы корней.

1. A_n $(n \geq 2)$ с $S = \{s_1, s_2,\ldots,s_{n-1},s_n\}$.

а) $J = \emptyset$;

б) $J = \{ s_1, s_2,\ldots, s_i \}$, $1 \leq i < n$;

в) $J = \{ s_j,\ldots, s_n \}$, $1 < j \leq n$;

г) $J = \{ s_1,\ldots, s_i, s_j,\ldots, s_n \}$, $1 \leq i \leq j-3$ и $j \leq n$;

2. B_2

а) $J = \emptyset$;

б) $J = \{ s_1 \}$;

в) $J = \{ s_2 \}$.

3. B_n $(n \geq 3)$, $S = \{ s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n \}$ и α_n – короткий корень

а) $J = \emptyset$;

б) $J = \{ s_1, s_2, \ldots, s_i \}$, $1 \leq i < n$;

в) $J = \{ s_n \}$;

г) $J = \{ s_1, s_2, \ldots, s_i, s_n \}$, $1 \leq i \leq n-3$.

4. C_n $(n \geq 3)$, $S = \{ s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n \}$ и α_n – длинный корень

а) $J = \emptyset$;

б) $J = \{ s_1, s_2, \ldots, s_i \}$, $1 \leq i < n$;

в) $J = \{ s_n \}$;

г) $J = \{ s_1, s_2, \ldots, s_i, s_n \}$, $1 \leq i \leq n-3$.

5. D_n $(n \geq 4)$, $S = \{ s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n \}$

а) $J = \emptyset$;

б) $J = \{ s_1, s_2, \ldots, s_i \}$, $1 \leq i \leq n-3$;

в) $J = \{ s_{n-1} \}$;

г) $J = \{ s_n \}$;

д) $J = \{ s_1, s_2, \ldots, s_i, s_{n-1} \}$, $1 \leq i \leq n-4$;

е) $J = \{ s_1, s_2, \ldots, s_i, s_{n-2} \}$, $1 \leq i \leq n-5$.

6. E_6, $S = \{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 \}$

а) $J = \emptyset$;

б) $J = \{ s_1 \}$ или $J = \{ s_1, s_3 \}$;

в) $J = \{ s_6 \}$ или $J = \{ s_5, s_6 \}$;

г) $J = \{ s_2 \}$;

д) $J = \{ s_1, s_6 \}$, $J = \{ s_1, s_3, s_6 \}$ или $J = \{ s_1, s_5, s_6 \}$;

е) $J = \{ s_1, s_2 \}$;

ж) $J = \{ s_2, s_6 \}$;

з) $J = \{ s_1, s_2, s_6 \}$.

7. E_7, $S = \{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7 \}$

а) $J = \emptyset$;

б) $J = \{ s_1 \}$ или $J = \{ s_1, s_3 \}$ или $J = \{ s_1, s_3, s_4 \}$;

в) $J = \{ s_7 \}$ или $J = \{ s_6, s_7 \}$;

г) $J = \{ s_2 \}$;

д) $J = \{ s_1, s_7 \}$, $J = \{ s_1, s_3, s_7 \}$, $J = \{ s_1, s_3, s_4, s_7 \}$, $J = \{ s_1, s_6, s_7 \}$ или $J = \{ s_1, s_3, s_6, s_7 \}$;

е) $J = \{ s_2, s_7 \}$;

ж) $J = \{ s_1, s_2 \}$ или $J = \{ s_1, s_2, s_3 \}$;

з) $J = \{ s_1, s_2, s_7 \}$ или $J = \{ s_1, s_2, s_3, s_7 \}$.

8. E_8, $S = \{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8 \}$.

а) $J = \emptyset$;

б) $J = \{ s_1\}$, $J = \{ s_1, s_3\}$, $J = \{ s_1, s_3, s_4\}$ или $J = \{ s_1, s_3, s_4, s_5\}$;

в) $J = \{ s_8\}$ или $J = \{ s_7, s_8\}$;

г) $J = \{ s_2\}$;

д) $J = \{ s_1, s_8\}$, $J = \{ s_1, s_3, s_8\}$, $J = \{ s_1, s_3, s_4, s_8\}$, $J = \{ s_1, s_3, s_4, s_5, s_8\}$, $J = \{ s_1, s_7, s_8\}$, $J = \{ s_1, s_3, s_7, s_8\}$, $J = \{ s_1, s_3, s_4, s_7, s_8\}$ или $J = \{ s_1, s_3, s_6, s_7\}$;

е) $J = \{ s_2, s_8\}$;

ж) $J = \{ s_1, s_2\}$, $J = \{ s_1, s_2, s_3\}$ или $J = \{ s_1, s_2, s_3, s_4\}$;

з) $J = \{ s_1, s_2, s_8\}$ или $J = \{ s_1, s_2, s_3, s_8\}$.

9. F_4, $S = \{ s_1, s_2, s_3, s_4\}$ и α_3 – короткий корень

а) $J = \emptyset$;

б) $J = \{ s_1\}$ или $J = \{ s_1, s_2\}$;

в) $J = \{ s_4\}$ или $J = \{ s_3, s_4\}$;

г) $J = \{ s_1, s_4\}$.

10. G_2, $S = \{ s_1, s_2\}$

а) $J = \emptyset$;

б) $J = \{ s_1\}$;

в) $J = \{ s_2\}$.

Теорема Реннера точно описывает в комбинаторных терминах выбор точки λ на гранях камеры Вейля C, при котором многогранник P_λ оказывается простым многогранником. С каждым подмножеством $J \subset S$ ассоциируется многогранник P_λ так, что $J=\{s \in S\colon s(\lambda)= \lambda\}$, т.е. J – это множество отражений в стенках камеры C, которые оставляют точку λ на месте и, следовательно, порождают стабилизатор W_λ точки λ в группе Вейля.

На основе списка Л. Реннера доказывается следующий результат о гипотезе Г.Калаи для выпуклых оболочек орбит кристаллографических групп отражений.

Теорема 5. Центрально-симметричные многогранники P_λ, получающиеся из списка Реннера для всех типов неприводимых кристаллографических групп отражений W, удовлетворяют 3^d – гипотезе Калаи.

Доказательство этой теоремы опирается на теорему Р.Стенли из его работы [4].

Подсчёт числа доминантных граней и алгоритмика подсчета стабилизаторов

Вершины грани F многогранника $P(\lambda)$ образуют орбиту подгруппы W_F и все они крайние точки, т.е. сама грань как $P(\lambda)$ является выпуклой оболочкой орбиты группы Вейля W_F с системой корней Δ_F. Здесь Δ_F состоит из тех корней системы Δ, отражения относительно которых переводят грань F в себя.

Определение 6. Грань F называется доминантной, относительно камеры C, если $dim(F \cap C) = dimF$.

Если F–доминантная относительно камеры C грань P(λ), то $F \cap C$ – фундаментальная область для действия W_F на F и $\Pi_F = \Delta_F \cap \Pi$ – система простых корней системы Δ_F, причем dim F = $|\Pi_F|$– число элементов в Π_F. Грани F =conv (W_F λ) восстанавливается по Π_F.

Утверждение 1. Всякая грань многогранника P(λ) получается из единственной доминантной грани относительно камеры C преобразованием $w \in W$, а всякая грань, которая принадлежит доминантной грани эквивалентна доминантной грани W_F – эквивалентна доминантной грани. В частности всякая доминантная грань содержит единственную доминантную вершину λ.

Доказательство данного утверждения содержится в важной работе Э.Б. Винберга[5].

Чтобы описать алгоритмическую модель для подсчёта числа граней многогранника P_λ=conv(W·λ) нам потребуется следующее определение из указанной выше работы Э.Б.Винберга[5].

Определение 7. Подмножество $\Pi' \subset \Pi$ называется λ-допустимым, если проекция λ на линейную оболочку каждой неразложимой компоненты системы корней Δ', порожденной Π' была отлична от нуля, т.е. в каждой неразложимой компоненте Δ' нашелся бы корень, не ортогональный λ.

Связь этого определения с задачей описания доминантных граней видна из следующих соображений.

Пусть $\Pi' \subset \Pi$ и $\Delta' \subset \Delta$ – порожденная им подсистема корней и w' – группа Вейля Δ'. Рассмотрим F = conv ($w' \cdot \lambda$) выпуклую оболочку орбиты w' λ группы w' при её действии на $\lambda \in E$.

Утверждение 2. Conv ($w' \cdot \lambda$) = F имеет размерность dim F=$|\Pi'|$, т.е. является выпуклым многогранником в плоскости $\lambda + \langle \Pi' \rangle$ ⇔ проекция λ на линейную оболочку каждой неразложимой компоненты системы Δ'была отлична от нуля, т.е. чтобы Π' было λ–допустимым подмножеством в Π.

Сформулированное выше утверждения означают, что верна следующая важная теорема Винберга.

Теорема 6 (Винберг). Пусть $\Delta \subset E$ система корней в евклидовом пространстве E и C – фиксированная камера Вейля системы Δ с отвечающей ей системой простых корней Π и $\lambda \in C$. Тогда выпуклая оболочка $P(\lambda) = conv\, W \cdot \lambda$ орбиты $W \cdot \lambda$ группы Вейля системы корней Δ обладает следующими свойствами:

а) каждая грань $P(\lambda)$ получается из единственной доминантной по отношению к камере C грани;

б) имеется биекция между множеством всех доминантных относительно C граней $P(\lambda)$ и множеством всех λ−допустимых подмножеств $\Pi' \subset \Pi$, причём каждому такому Π' отвечает грань $F = conv\, W' \cdot \lambda$ размерности

$|\Pi'|$, где W'– группа Вейля системы корней $\Delta' \subset \Delta$, порожденной подмножеством Π'.

Описание λ-допустимых $\Pi' \subset \Pi$ в графовых терминах содержится в следующей теореме.

Теорема 7. Подмножество $\Pi' \subset \Pi$ λ-допустимо $\Leftrightarrow$ удаление из декорированного Γ_λ вектора $\lambda \in E$ множества вершин, отвечающих простым корням из дополнения $\Pi \backslash \Pi'$, приводит к графу $\Gamma_\lambda{}'$, каждая компонента связности которого, содержит вершину из носителя supp λ.

Доказательство. Пусть Π'-λ-допустимо. Схема Дынкина системы корней Δ', порожденной Π' есть подграф схемы Дынкина, порожденный множеством её вершин, отвечающих корням из Π'. Этот подграф есть граф $\Gamma_\lambda{}'$ из формулировки теоремы. Допустим, что среди связных компонент $\Gamma_\lambda{}'$ есть такая, у вершин которой все λ_j оказались бы нулевыми. Это означает $< \lambda, \alpha_i >= 0$ для α_i из Π' порождающих подсистему $\Delta_j \subset \Delta'$. Тем самым $\lambda \perp < \Delta_j >$. Последнее противоречит λ-допустимости Π'. Импликация доказана. Обратно, если бы Π' не оказалось бы λ-допустимым, то ортогональная проекция λ на некоторое $< \Delta_j >$ была бы нулевой, т.е. $\lambda \perp < \Delta_j >$ и все отметки λ_j на некоторой компоненте графа $\Gamma_\lambda{}'$ равнялись нулю. Но это означает, что у supp λ нет вершин из этой компоненты. Теорема доказана.

Утверждение 3. Число доминантных граней F многогранника P(λ)=convWλ равно числу связных подграфов (числу допустимых вершин схемы Кокстера Дынкина) в расширенном графе Кокстера-Дынкина.

Указанное предложение служит математическим основанием для разработки математической модели числа граней выпуклых оболочек орбит групп Вейля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведен анализ 3^d – гипотезы Калаи в классе выпуклых оболочек орбит групп Вейля W неприводимых систем корней. Основным математическим результатом данной работы является теорема 7 и утверждение 3. Они получены на основе результатов работы Винберга [5].

Список литературы / References

1. *Винберг Э.Б.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам / Э. Б. Винберг, А.Л. Онищик. М.: Наука, 1988. 344 с.
2. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли / Н. Бурбаки. М.: Мир, 1972. 334 с.
3. *Renner L.E.* Descent systems for Bruhat Posets// arXiv:0802.2709[math.AG].
4. *Stanley R.* On the numbers of Faces of Centrally – Symmetric Simplicial Polytopes/ R.Stanley//Graphs and Combinations, 1987. 3. P. 55–66.
5. *Винберг Э.Б.* “О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной

обертывающей алгебры”. Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:1 (1990), 3–25
È.B. Vinberg, “On certain commutative subalgebras of a universal enveloping algebra”. Math. USSR-Izv. 36:1 (1991). 1–22.