LXXIII INTERNATIONAL CORRESPONDENCE SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE «INTERNATIONAL SCIENTIFIC REVIEW OF THE PROBLEMS AND PROSPECTS OF MODERN SCIENCE AND EDUCATION»

INTERNATIONAL SCIENTIFIC REVIEW OF THE PROBLEMS AND PROSPECTS OF MODERN SCIENCE AND EDUCATION

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE

PROBLEMS OF SCIENCE

COLLECTION OF SCIENTIFIC ARTICLES

SCIENTIFIC ELECTRONIC LIBRARY
LIBRARY.RU

Google scholar

HTTPS://SCIENTIFIC-CONFERENCE.COM

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

LXXIII INTERNATIONAL CORRESPONDENCE SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE

Bowker®
a ProQuest. affiliate

ISSN 2542-0798

INTERNATIONAL SCIENTIFIC REVIEW OF THE PROBLEMS AND PROSPECTS OF MODERN SCIENCE AND EDUCATION

Boston. USA. September 22-23, 2020

ISSN 2542-0798
UDC 08

LXXIII INTERNATIONAL CORRESPONDENCE SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE «INTERNATIONAL SCIENTIFIC REVIEW OF THE PROBLEMS AND PROSPECTS OF MODERN SCIENCE AND EDUCATION»

(Boston. USA. September 22-23, 2020)

BOSTON. MASSACHUSETTS
PRINTED IN THE UNITED STATES OF AMERICA
2020

INTERNATIONAL SCIENTIFIC REVIEW OF PROBLEMS AND PROSPECTS OF MODERN SCIENCE AND EDUCATION / COLLECTION OF SCIENTIFIC ARTICLES. LXXIII INTERNATIONAL CORRESPONDENCE SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE (Boston, USA, September 22-23, 2020). Boston. 2020

EDITOR: EMMA MORGAN
TECHNICAL EDITOR: ELIJAH MOORE
COVER DESIGN BY DANIEL WILSON

PROBLEMS OF SCIENCE
PUBLISHED WITH THE ASSISTANCE OF NON-PROFIT ORGANIZATION
«INSTITUTE OF NATIONAL IDEOLOGY»
VENUE OF THE CONFERENCE:
1 AVENUE DE LAFAYETTE, BOSTON, MA 02111, UNITED STATES
TEL. OF THE ORGANIZER OF THE CONFERENCE: +1 617 463 9319 (USA, BOSTON)
THE CONFERENCE WEBSITE:
HTTPS://SCIENTIFIC-CONFERENCE.COM

Contents

ON GENERALIZED BOLZA PROBLEM

Sadygov M.A (Republic of Azerbaijan) Email: Sadygov573@scientifictext.ru

Sadygov Misraddin Allahverdi oglu - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL METHODS OF CONTROL THEORY,
FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS,
BAKU STATE UNIVERSITY, BAKU, REPUBLIC OF AZERBAIJAN

Abstract: *in this paper, we obtain necessary and sufficient conditions for an extremum for the generalized Boltz problem in the space of Banach-valued absolutely continuous functions. Note that the minimizing function in the general case is not an interior point of the domain of definition of a functional. In this paper, using the Clarke subdifferential, the nonconvex generalized Bolz problem is considered and the necessary extremum condition is obtained.*
In this paper, we obtain a necessary condition of the first and second orders for the minimum of the generalized Bolza problem with constraints in the space of Banach-valued absolutely continuous functions.

Keywords: *necessary condition, Lipschitz function, subdifferential.*

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ БОЛЬЦА

Садыгов М.А. (Азербайджанская Республика)

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы - доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра математических методов теории управления, механико-математический факультет,
Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджанская Республика

Аннотация: *в работе получены необходимые и достаточные условия экстремума для обобщенной задачи Больца в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций. Отметим, что минимизирующая функция в общем случае не является внутренней точкой области определения функционала. В работе, используя субдифференциал Кларка, рассмотрена невыпуклая обобщенная задача Больца и получено необходимое условие экстремума.*
В работе получено необходимое условие первого и второго порядков для минимума обобщенной задачи Больца с ограничением в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций.

Ключевые слова: *необходимое условие, липшицевая функция, субдифференциал.*

1. Введение

Используя субдифференциала интегрального и терминального функционала в пространстве абсолютно непрерывных функций (см. [1]) и теории двойственности в задачах выпуклой оптимизации, в работе исследуется выпуклая вариационная задача, заданная в пространстве абсолютно непрерывных функций. Хотя выпуклые вариационные задачи изучены разными авторами, но такие задачи не применимы к выпуклым экстремальным задачам для включений. Отметим, что минимизирующая функция в общем случае не является внутренней точкой области определения функционала.

Далее, используя субдифференциал Кларка, рассмотрена невыпуклая обобщенная задача Больца и получено необходимое условие экстремума.

В работе получено также необходимое условие первого и второго порядков для минимума обобщенной задачи Больца с ограничением.

Работа является обобщением некоторых результатов работ автора в [2; 3, с. 82-106; 4, с. 263-344], где получены необходимые и достаточные условия минимума для обобщенной задачи Больца в пространстве $n-$ мерных абсолютно непрерывных функций. В данной работе получено необходимое и достаточное условие экстремума для обобщенной задачи Больца в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций.

2. Об обобщенной задаче Больца

Пусть X сеперабельное банахово пространство. Обозначим через X^*, банахово пространство линейных непрерывных функционалов заданных на X. Если X рефлексивное сеперабельное банахово пространство, то X^* также сеперабельное пространство.

Через $C([t_0,t_1],X)$ будем обозначать пространство непрерывных функций $x:[t_0,t_1]\to X$ с нормой $\|x(\cdot)\|_C = \max\{\|x(t)\| : t\in[t_0,t_1]\}$. Пусть $1\le p<\infty$. Обозначим через $L_p([t_0,t_1],X)$ множество (эквивалентных классов) таких измеримых функций $x:[t_0,t_1]\to X$, что $\int_{t_0}^{t_1}\|x(t)\|^p dt<+\infty$ при $1\le p<\infty$ (см. [5, с. 96]). Положим $\|x(\cdot)\|_p = (\int_{t_0}^{t_1}\|x(t)\|^p dt)^{\frac{1}{p}}$.

Символом $W_p^1[t_0,t_1],X)$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерыв-ных функций из $[t_0,t_1]$ в X первая производная по Фреше, которых принадлежит $L_p([t_0,t_1],X)$, т.е. рассмотрим $W_p^1([t_0,t_1],X)=\{x(\cdot)\in C([t_0,t_1],X): \dot x(\cdot)\in L_p([t_0,t_1],X)\}$ с нормой $\|x(\cdot)\|_{W_p^1} = \|x(t_0)\| + \left(\int_{t_0}^{t_1}\|\dot x(t)\|^p dt\right)^{1/p}$ или с эквивалентно нормой $\|x(\cdot)\|_{W_p} = \max\limits_{t_0\le t\le t_1}\|x(t)\| + \left(\int_{t_0}^{t_1}\|\dot x(t)\|^p dt\right)^{1/p}$.

Отметим, что если $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, то $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} z(s)ds$, где $x_0\in X$ и $z(\cdot)\in L_p([t_0,t_1],X)$. Поэтому всякий линейный непрерывный функционал z^* (т.е. $z^*\in W_p^1([t_0,t_1],X)^*$) на пространстве $W_p^1([t_0,t_1],X)$, $1\le p<\infty$, можно единственным образом представить в виде $z^*(x)=\langle a, x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1}\langle \upsilon(t),\dot x(t)\rangle dt$, где $a\in X^*,\ \upsilon(\cdot)\in L_{p'}([t_0,t_1],X^*),\ pp'=p+p'$, $\upsilon(\cdot):[t_0,t_1]\to X^*$ - скалярно интегрируемое отображение и $\int_{t_0}^{t_1}\upsilon(s)ds\in X^*$ (см.[6, с.60, с.78]). Функционал z^* в дальнейшем обозначается символом (a,υ).

В дальнейшем, будем говорить, что $y^*\in C([t_0,t_1],X)^*$ и $z^*\in W_p^1([t_0,t_1],X)^*$ совпадают, если $y^*(x)=z^*(x)$ при $x\in W_p^1([t_0,t_1],X)$. Множество $W_p^1([t_0,t_1],X)$ с нормой $\|x(\cdot)\| = \max\limits_{t_0\le t\le t_1}\|x(t)\|$ обозначим $C_p^1([t_0,t_1],X)$. Если $\varphi: W_p^1([t_0,t_1],X)\to R_\infty$, то положим $\operatorname{dom}_{W_p^1}\varphi = \operatorname{dom}_{C_p^1}\varphi = \{x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X):\varphi(x)<+\infty)\}$.

Рассматривается задача минимизации функционала

$$\Phi_0(x(\cdot)) = \varphi(x(t_0),x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot x(t))dt, \tag{2.1}$$

в классе абсолютно непрерывных функций $x:[t_0,t_1]\to X$, т.е. $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, где $\varphi: X\times X\to R_{+\infty}$, $f:[t_0,t_1]\times X\times X\to R_{+\infty}$.

В п. 2 будем предполагать, что $f:[t_0,t_1]\times(X\times X)\to R_{+\infty}$ нормальный выпуклый интегрант, $\varphi: X\times X\to R_{+\infty}$ выпуклая функция. Функция $\bar{x}(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ называется решением обобщенной задачи Больца (2.1), если $|\Phi_0(\bar{x}(\cdot))|<+\infty$ и справедливо неравенство $\Phi_0(x(\cdot))\ge\Phi_0(\bar{x}(\cdot))$ при $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(x,y)=\varphi(x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t))dt,$$

где $y(\cdot)\in L_p([t_0,t_1],X)$. Положим $h(y)=\inf\limits_{x\in W_p^1([t_0,t_1],X)}\Phi(x,y)$. Из предложения 2.5 [7, с. 28] вытекает, что h выпуклая функция и $h(0)=\inf\limits_{x\in W_p^1([t_0,t_1],X)}\Phi_0(x)$.

Лемма 2.1. Допустим, что $\inf\limits_{x\in W_p^1([t_0,t_1],X)}\Phi_0(x)$ конечен и существуют $x_0(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, число $\varepsilon>0$ и суммируемая функция $r(t)>0$, что $\sup\limits_{\|z\|\le\varepsilon} f(t,x_0(t)+z,\dot{x}_0(t))\le r(t)$ в $[t_0,t_1]$, а функция $\varphi(x_0(t_0),\cdot)$ непрерывна в точке $x_0(t_1)$. Тогда функция h субдифференцируема в нуле, т.е. задача (2.1) стабильна (см. [8, с.60]).

Доказательство. Так как $J(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x_0(t)+x(t),\dot{x}_0(t))dt$ непрерывен в точке нуль в пространстве $W_p^1([t_0,t_1],X)$, то существуют числа $\alpha_1>0$ и L_1 такие, что $J(x)\le L_1$ при $x\in\{z(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X):\|z(\cdot)\|_{W_p}\le\alpha_1\}$. Также из непрерывности $\varphi(x_0(t_0),\cdot)$ получим, что существуют $\alpha_2>0$ и L_2, что $\varphi(x_0(t_0),b)\le L_2$ при $b\in X,\ \|b-x_0(t_1)\|\le\alpha_2$.

Обозначив $\alpha=(1+\sqrt[p']{t_1-t_0}\ )^{-1}\min\{\alpha_1,\alpha_2\},\ \ x_y(t)=x_0(t)-\int_{t_0}^{t} y(s)ds$ получим

$$h(y)=\inf_{x\in W_p^1([t_0,t_1],X)}\Phi(x,y)\le\Phi(x_y,y)\le L_1+L_2$$

при $y(\cdot)\in L_p([t_0,t_1],X)$, $\|y\|_p\le\alpha$. Тогда из предложения 1.5.2[8, с.31] вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль. Лемма доказана.

Если в доказательстве леммы 2.1 использовать из нормы $\|\cdot\|_{W_p^1}$, то надо положить $\alpha=\min\{\alpha_1,(\sqrt[p']{t_1-t_0}\ )^{-1}\alpha_2\}$, где считаем, что $\sqrt[p']{t_1-t_0}=1$ при $p'=+\infty$.

Пусть Σ алгебра борелевских подмножеств в $[t_0,t_1]$. Множество всех правильных мер $q:\Sigma\to X^*$ обозначим через $frm([t_0,t_1],X^*)$ (см. [9, с.61]). Отметим, что всякая правильная мера $q:\Sigma\to X^*$ единственным образом разлагается в сумму: $q(\cdot)=\psi(\cdot)+\varphi(\cdot)$, где $\psi(\cdot)$ - абсолютно непрерывная, а $\varphi(\cdot)$ - сингулярная относительно dt правильные меры (см. [9, с.63]). Так как $\psi(\cdot)$ абсолютно непрерывная мера, то существует такая функция $\tilde{\psi}(\cdot)\in L_1([t_0,t_1],X^*)$, что $\psi(E)=\int_E\tilde{\psi}(t)dt$, где $E\subset[t_0,t_1]$ измеримое множество. Для удобства обозначим $\tilde{\psi}(t)$ через $\dot{\psi}(t)$. Положим $\dot{q}(t)=\dot{\psi}(t)$.

Пусть $w \in X,\ \upsilon \in X^*$. *Положим* $f^0(t,x,\upsilon) = \inf\limits_{y \in X}\{\langle \upsilon, y\rangle + f(t,x,y)\}$. Из условия следует, что $x \to f^0(t,x,\upsilon)$ выпуклая функция. Для простоты далее положим $\partial f^0(t,\bar{x},\upsilon) = \partial_x f^0(t,\bar{x},\upsilon)$, $p + p' = pp'$, где $1 \le p < \infty$, $\partial_x f^0(t,\bar{x},\upsilon)$ субдифференциал функции $f^0(t,x,\upsilon)$ в точке $\bar{x}$ в смысле выпуклого анализа.

Теорема 2.1. Для того, чтобы функция $\bar{x}(t)$ среди всех функций $x(\cdot) \in W_p^1([t_0,t_1],X)$ минимизировала функционал (2.1) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot) \in frm([t_0,t_1],X^*)$, функция $\psi(\cdot) \in L_{p'}([t_0,t_1],X^*)$ и векторы $\bar{a},\ \bar{b} \in X^*$ такие, что

1) $\dot{q}(t) \in \partial f^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+\bar{b})$,

2) $f^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+\bar{b}) = \langle \psi(t)+\bar{b}, \dot{\bar{x}}(t)\rangle + f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$,

3) $(-\bar{a}-\bar{b},\bar{b}) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$,

4) $\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle y(t), q(dt)\rangle = \langle \bar{a}, x(t_0)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \psi(t), \dot{x}(t)\rangle dt$ при $x \in W_p^1([t_0,t_1],X)$,

5) $\sup\limits_{y \in Q}\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle y(t), q_s(dt)\rangle = \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \bar{y}(t), q_s(dt)\rangle$,

где $Q = \{y \in W_p^1([t_0,t_1],X) : J_1(y(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(t,y(t),\psi(t)+\bar{b})dt < +\infty\}$, q_s - сингулярная часть меры q, а если выполнено условие леммы 2.1 и $\operatorname{int}_{C_p^1} \operatorname{dom} J_1 = \operatorname{int}_{W_p^1} \operatorname{dom} J_1$, то соотношения 1)-5) и являются необходимыми.

Доказательство. Достаточность. Из 1) следует, что

$$f^0(t,x,\psi(t)+\bar{b}) - f^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+\bar{b}) \ge \langle \dot{q}(t), x - \bar{x}(t)\rangle$$

при $x \in X$. Отсюда, используя 2) имеем, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \psi(t)+\bar{b}, \dot{x}(t)\rangle dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt - \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \psi(t)+\bar{b}, \dot{\bar{x}}(t)\rangle dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt \ge \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \dot{q}(t), x(t)-\bar{x}(t)\rangle dt$$

при $x(\cdot) \in Q$. Из 3) следует, что

$$\varphi(x(t_0),x(t_1)) - \varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1)) \ge \langle (-\bar{a}-\bar{b},\bar{b}),\ (x(t_0),x(t_1)) - (\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\rangle$$

при $x(\cdot) \in W_p^1([t_0,t_1],X)$. Поэтому

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \psi(t)+\bar{b}, \dot{x}(t)\rangle dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt - \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \psi(t)+\bar{b}, \dot{\bar{x}}(t)\rangle dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt + \varphi(x(t_0),x(t_1)) -$$

$$-\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1)) \ge \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \dot{q}(t), x(t)-\bar{x}(t)\rangle dt + \langle(-\bar{a}-\bar{b},\bar{b}),(x(t_0),x(t_1)) - (\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\rangle$$

при $x(\cdot) \in Q$. Используя 4) из последного соотношения получим

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle (x(t)-\bar{x}(t)),\ q(dt)\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \bar{b}, \dot{x}(t)\rangle dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt - \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \bar{b}, \dot{\bar{x}}(t)\rangle dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt + \varphi(x(t_0),x(t_1)) -$$

$$-\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1)) \ge \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle \dot{q}(t), x(t)-\bar{x}(t)\rangle dt + \langle(-\bar{b},\bar{b}),(x(t_0),x(t_1)) - (\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\rangle$$

при $x(\cdot)\in Q$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle (x(t)-\bar{x}(t)),\ q(dt)\rangle+\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1} f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt+\varphi(x(t_0),x(t_1))-\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\ge\int_{t_0}^{t_1}\langle \dot{q}(t),x(t)-\bar{x}(t)\rangle dt$$

при $x(\cdot)\in Q$. Из 5) следует, что $\int_{t_0}^{t_1}(x(t)-\bar{x}(t))dq_s(t)\le 0$ при $x(\cdot)\in Q$. Тогда получим, что

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1} f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt+\varphi(x(t_0),x(t_1))-\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\ge 0$$

при $x(\cdot)\in Q$. Так как $\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),\psi(t)+\bar{b})dt-\int_{t_0}^{t_1}\langle \psi(t)+\bar{b},\dot{x}(t)\rangle dt\le\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt,$ то имеем, что $\{x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X):\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt<+\infty\}\subset Q$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt-\int_{t_0}^{t_1} f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt+\varphi(x(t_0),x(t_1))-\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))\ge 0$$

при $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Достаточность теоремы 2.1 доказана.

Необходимость. Из леммы 2.1 вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль. Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [8, с. 60, 62] вытекает, что решение $\bar{x}(\cdot)$ задачи $\inf\{\Phi_0(x):x\in W_p^1([t_0,t_1],X\}$ и решение $(-\bar{z}(\cdot))$ задачи $\sup\limits_{z\in L_{p'}([t_0,t_1],X^*)}\{-\Phi^*(0,z)\}$ связаны экстремальным соотношением

$$\Phi(\bar{x},0)+\Phi^*(0,-\bar{z})=0\,. \tag{2.2}$$

Отсюда имеем $\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))+\int_{t_0}^{t_1} f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt+\Phi^*(0,-\bar{z})=0$. По определению

$$\Phi^*(0,-\bar{z})=\sup_{x\in W_p^1([t_0,t_1],X),\ y\in L_p^1([t_0,t_1],X)}\left\{-\int_{t_0}^{t_1}\langle \bar{z}(t),y(t)\rangle dt-\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t))dt-\varphi(x(t_0),x(t_1))\right\}=$$

$$=\sup_{\substack{x\in W_p^1([t_0,t_1],X)\\ y\in L_p^1([t_0,t_1],X)}}\left\{-\int_{t_0}^{t_1}\langle \bar{z}(t),\dot{x}(t)+y(t)\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle \bar{z}(t),\dot{x}(t)\rangle dt-\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t))dt-\varphi(x(t_0),x(t_1))\right\}=$$

$$=\sup_{x\in W_p^1([t_0,t_1],X)}\{\int_{t_0}^{t_1}\langle \bar{z}(t),\dot{x}(t)\rangle dt-\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),\bar{z}(t))dt-\varphi(x(t_0),x(t_1))\}. \tag{2.3}$$

Обозначим $J_1(x)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),\bar{z}(t))dt,\quad J_2(x)=\varphi(x(t_0),x(t_1))$. Из (2.2), (2.3) вытекает, что J_1 и J_2 собственные функционалы. Из предложения 2.5 [7, с.28] следует, что $x\to f^0(t,x,\bar{z}(t))$ выпуклая функция и аналогично теореме 8.1.4 или предложению 8.1.10 [10, с.345, 348] ***проверяется, что*** $f^0(t,y,\bar{z}(t))$ $L\times B$-измерима. Так как

$$f^0(t,x_0(t)+z,\bar{z}(t))\le\langle \bar{z}(t),\dot{x}_0(t)\rangle+f(t,x_0(t)+z,\dot{x}_0(t))\le\langle \bar{z}(t),\dot{x}_0(t)\rangle+r(t)$$

при $\|z\|\le\varepsilon$ в $[t_0,t_1]$, то при условии теоремы 2.1 имеем, что функционал J_1 непрерывен в точке $x_0(\cdot)$. По условию $J_2(x_0(\cdot))$ конечен.

Положив $\bar z^* = (0, \bar z(\cdot)) \in W_p^1([t_0,t_1],X)^*$, $S(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), \bar z(t))dt + \varphi(x(t_0), x(t_1))$

имеем, что $\Phi^*(0, -\bar z) = S^*(\bar z^*)$. Используя неравенство Юнга-Фенхелья получим

$$S^*(\bar z^*) \ge \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \right\rangle dt - S(\bar x), \quad S(\bar x) \le \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \right\rangle dt + \Phi_0(\bar x),$$

то отсюда получим, что $S^*(\bar z^*) \ge \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \right\rangle dt - S(\bar x) \ge -\Phi_0(\bar x).$ Поэтому из соотношения (2.2) вытекает, что $S^*(\bar z^*) = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \right\rangle dt - S(\bar x), \quad S(\bar x) = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \right\rangle dt + \Phi_0(\bar x).$ Из второго соотношения имеем, что $\int_{t_0}^{t_1} f^0(t, \bar x(t), \bar z(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t, \bar x(t), \dot{\bar x}(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \right\rangle dt.$ Отсюда получим, что $f^0(t, \bar x(t), \bar z(t)) = \left\langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \right\rangle + f(t, \bar x(t), \dot{\bar x}(t))$ при $t \in [t_0, t_1]$. Из равенства $S^*(\bar z^*) = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \right\rangle dt - S(\bar x)$ вытекает, что $\bar z^* \in \partial_{W_p^1} S(\bar x)$. Из теоремы 0.3.3[10, с.59] (теорема Моро-Рокафеллара) имеем, что $\partial_{W_p^1} S(\bar x) = \partial_{W_p^1} J_1(\bar x) + \partial_{W_p^1} J_2(\bar x)$. Тогда найдутся точки $\bar z_i^* \in W_p^1([t_0,t_1],X)^*$, где $i = 1,2,$ такие, что $\bar z^* = \bar z_1^* + \bar z_2^*$, $\bar z_1^* = (\bar a, \psi(\cdot))$, $\bar z_2^* = (\bar d, \bar b)$ и $\bar z_1^* \in \partial_{W_p^1} J_1(\bar x)$, $\bar z_2^* \in \partial_{W_p^1} J_2(\bar x)$. Из $\bar z_1^* \in \partial_{W_p^1} J_1(\bar x)$ следует , что $J_1'(\bar x; y)$ собственный функционал в $C_p^1([t_0,t_1],X)$. Так как $J_1(x)$ выпуклый функционал в $C_p^1([t_0,t_1],X)$ и непрерывен в точке $x_0(\cdot)$, то $J_1(x)$ непрерывен в $\operatorname{int}_{C_p^1} J_1(x)$ и $\operatorname{int}_{C_p^1} J_1(x) = \operatorname{int}_{W_p^1} J_1(x) \ne \varnothing.$ Поэтому используя следствие 3.5[1], имеем $\operatorname{cl}_{C_p^1} J_1'(\bar x; y) = \operatorname{cl}_{W_p^1} J_1'(\bar x; y).$ Тогда из следствия 3.3[1] вытекает, что $\partial_{W_p^1} J_1(\bar x) = \partial_{C_p^1} J_1(\bar x)$.

Поэтому существует функционал $\bar z_q^* \in C_p^1([t_0,t_1],X)^*$ такой, что $\bar z_1^* = \bar z_q^*$ и $\bar z_q^* \in \partial_{C_p^1} J_1(\bar x)$.

По следствию 3.1[1] и замечанию 3.2[1] $\bar z_q^* \in \partial_{C_p^1} J_1(\bar x)$ в том и только в том случае, когда $\dot q(t) \in \partial f^0(t, \bar x(t), \bar z(t))$ и $\sup_{y \in Q} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle y(t), q_s(dt) \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \bar x(t), q_s(dt) \right\rangle,$ где $q_s(\cdot)$ сингулярная часть меры $q(\cdot)$. Ясно, что $(0, \bar z(\cdot)) = (\bar a, \psi(\cdot)) + (\bar d, \bar b)$ и $\left\langle \bar a, x(t_0) \right\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \psi(t), \dot x(t) \right\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle x(t), q(dt) \right\rangle$ для любого $x \in W_p^1([t_0,t_1],X)$. Поэтому $\bar z(t) = \psi(t) + \bar b, \quad \bar a + \bar d = 0.$

Так как $\bar z_2^* \in \partial_{W_p^1} J_2(\bar x)$, то из теоремы 4.1[1] следует, что $\bar z_2^* = (\bar d, \bar b)$, где $\bar b \in X^*$ и $(\bar d - \bar b, \bar b) \in \partial \varphi(\bar x(t_0), \bar x(t_1)),$ где $\bar d = -\bar a$. Теорема доказана.

Отметим, что если $f:[t_0,t_1]\times(X\times X)\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант и $\varphi: X\times X\to R_{+\infty}$ функция, то достаточность теоремы 2.1 также верна, где субдифференциал считаем также в смысле выпуклого анализа.

Если функционал $y\to f^0(t,y,\bar z(t))$ выпуклый нормальный интегрант, то из леммы 3.4 [1] следует, что $\operatorname{int}_{C_p^1}\operatorname{dom}J_1=\operatorname{int}_{W_p^1}\operatorname{dom}J_1$.

Если функционал $J_1(x)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),\bar z(t))dt$ удовлетворяет условиям леммы 2.2[1], то $\operatorname{int}_{C_p^1}\operatorname{dom}J_1=\operatorname{int}_{W_p^1}\operatorname{dom}J_1$.

Если существует функция $\lambda(\cdot)\in L_1[t_0,t_1]$ такая, что $\left|f^0(t,x_2,\bar z(t))-f^0(t,x_1,\bar z(t))\right|\le$ $\le\lambda(t)\|x_2-x_1\|$ при $x_1,x_2\in\operatorname{dom}f_t^0(\cdot,\,\bar z(t))$, то $\operatorname{int}_{C_p^1}\operatorname{dom}J_1=\operatorname{int}_{W_p^1}\operatorname{dom}J_1$.

Отметим, что если $X=R^n$, то из леммы 2.4[1] следует, что $\operatorname{int}_{C_p^1}\operatorname{dom}J_1=\operatorname{int}_{W_p^1}\operatorname{dom}J_1$.

Если при $x_0(t)=\bar x(t)$ удовлетворяется условие теоремы 2.1, то из теоремы 3.2[1] следует, что $q(\cdot)$ абсолютно непрерывная мера. Тогда имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle x(t),\,q(dt)\rangle=\int\limits_{t_0}^{t_1}x(t)d(q(t)-q(t_1))=\langle q(t_1)-q(t_0),x(t_0)\rangle+\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle q(t_1)-q(t),\dot x(t)\rangle dt$$

при $x\in W_p^1([t_0,t_1],X)$. Так как $\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle x(t),\ q(dt)\rangle=\langle\bar a,x(t_0)\rangle+\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle\psi(t),\dot x(t)\rangle dt$ при $x\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, то отсюда получим, что $\bar a=q(t_1)-q(t_0)$ и $\psi(t)=q(t_1)-q(t)$, где $\psi(\cdot)\in L_{p'}([t_0,t_1],X^*)$. Поэтому $\dot q(t)=-\dot\psi(t)$ и $\psi(t_0)=\bar a,\ \psi(t_1)=0$. Обозначив $x^*(t)=\psi(t)+\bar b$ имеем, что $\bar a+\bar b=x^*(t_0),\quad \bar b=x^*(t_1).$ Отсюда следует, что $x^*(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X^*)$.

Поэтому используя из теорему 3.1[1] или теорему 3.2[1] в доказательстве теоремы 2.1 имеем, что верно следующее следствие.

Следствие 2.1. Для того чтобы $\bar x(t)$, среди всех функций $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ минимизировала функционал ***(2.1)*** достаточно, чтобы нашлась функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X^*)$ такая, что

1) $-\dot{\bar x}^*(t)\in\partial f^0(t,\bar x(t),\bar x^*(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$,

2) $f^0(t,\bar x(t),\,\bar x^*(t))=\langle\bar x^*(t),\,\dot{\bar x}(t)\rangle+f(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))$,

3) $(-\bar x^*(t_0),\,\bar x^*(t_1))\in\partial\varphi(\bar x(t_0),\,\bar x(t_1))$,

а если при $x_0(t)=\bar x(t)$ удовлетворяется условие леммы 2.1, то соотношения ***1)-3)*** являются и необходимыми.

Доказательство. Достаточность теоремы непосредственно проверяется.

Необходимость. Необходимость следствия 2.1 следует из доказательства теоремы 2.1. Аналогично доказательству теоремы 2.1 имеем, что $f^0(t,\bar x(t),\bar z(t))=\langle\bar z(t),\dot{\bar x}(t)\rangle+f(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))$ и $\bar z^*\in\partial_{W_p^1}S(\bar x)$, где $\bar z^*=(0,\bar z(\cdot))$. Из теоремы 0.3.3 [10, с.59] (теорема Моро-Рокафеллара) имеем, что $\partial_{W_p^1}S(\bar x)=\partial_{W_p^1}J_1(\bar x)+\partial_{W_p^1}J_2(\bar x)$.

Тогда найдутся точки $\bar{z}_i^* \in W_p^1([t_0,t_1],X)^*$, где $i=1,2,$ такие, что $\bar{z}^* = \bar{z}_1^* + \bar{z}_2^*$, $\bar{z}_1^* = (\bar{a}, \psi(\cdot))$, $\bar{z}_2^* = (\bar{d}, \bar{b})$ и $\bar{z}_1^* \in \partial_{W_p^1} J_1(\bar{x})$, $\bar{z}_2^* \in \partial_{W_p^1} J_2(\bar{x})$. Из теоремы 3.1[1] следует, что $\bar{z}_1^* \in \partial_{W_p^1} J_1(\bar{x})$ тогда и только тогда, когда $\bar{z}_1^* = (\bar{a}, \psi)$ "абсолютно непрерывно" и $-\dot{\psi}(t) \in \partial f^0(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t))$ при $t \in [t_0, t_1]$. Из следствия 3.3[1] вытекает, что $\partial_{W_p^1} J_1(\bar{x}) = \partial_{C_p^1} J_1(\bar{x})$. Поэтому существует функционал $\bar{z}_q^* \in C_p^1([t_0,t_1],X)^*$ такой, что $\bar{z}_1^* = \bar{z}_q^*$ и $\bar{z}_q^* \in \partial_{C_p^1} J_1(\bar{x})$, т.е. $\langle \bar{a}, x(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), \dot{x}(t) \rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), q(dt) \rangle$ при $x(\cdot) \in W_p^1([t_0,t_1],X)$. Так как функционал $\bar{z}_1^* = (\bar{a}, \psi) \in W_p^1([t_0,t_1],X)^*$ абсолютно непрерывен, то $\psi \in W_1^1([t_0,t_1],X^*)$, $\psi(t_0) = \bar{a}$ и $\psi(t_1) = 0$. Тогда имеем, что $-\int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{\psi}(t), x(t) \rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle x(t), q(dt) \rangle$ при $x(\cdot) \in W_p^1([t_0,t_1],X)$. Отсюда имеем, что $q(\cdot) = -\psi(\cdot)$. Так как $\bar{z}_2^* \in \partial_{W_p^1} J_2(\bar{x})$, то из теоремы 4.1[1] следует, что $\bar{z}_2^* = (\bar{d}, \bar{b})$, где $\bar{b} \in X^*$ и $(\bar{d} - \bar{b}, \bar{b}) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1)).$ Из равенства $\bar{z}^* = \bar{z}_1^* + \bar{z}_2^*$ имеем, что $\bar{z}(t) = \psi(t) + \bar{b},$ $\bar{d} = -\bar{a}$. Положив $\bar{x}^*(t) = \psi(t) + \bar{b}$ имеем, что $\bar{x}^*(t_0) = \psi(t_0) + \bar{b} = \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{x}^*(t_1) = \psi(t_1) + \bar{b} = \bar{b}$. Поэтому $(-\bar{x}^*(t_0), \bar{x}^*(t_1)) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1))$. Из $-\dot{\psi}(t) \in \partial f^0(t, \bar{x}(t), \bar{z}(t))$ следует, что $-\dot{\bar{x}}^*(t) \in \partial f^0(t, \bar{x}(t), \bar{x}^*(t))$. Следствие доказано.

Отметим, что если $f : [t_0, t_1] \times (X \times X) \to R_{+\infty}$ нормальный интегрант и $\varphi : X \times X \to R_{+\infty}$ функция, то достаточность следствия 2.1 также верна.

Из следствия 2.1 следует, что верно следующее следствие 2.2.

Следствие 2.2. Для того чтобы $\bar{x}(t)$, среди всех функций $x(\cdot) \in W_p^1([t_0,t_1],X)$ минимизировала функционал *(2.1)* достаточно, чтобы нашлась функция $z^*(\cdot) \in W_1^1([t_0,t_1],X^*)$ такая, что

1) $(\dot{z}^*(t), z^*(t)) \in \partial f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$ при $t \in [t_0, t_1]$,

2) $(z^*(t_0), -z^*(t_1)) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1))$,

а если при $x_0(t) = \bar{x}(t)$ удовлетворяется условие леммы 2.1, то соотношения ***1),2)*** являются и необходимыми.

Доказательство. Из включения $-\dot{\bar{x}}^*(t) \in \partial f^0(t, \bar{x}(t), \bar{x}^*(t))$ следует, что $f^0(t, x, \bar{x}^*(t)) - f^0(t, \bar{x}(t), \bar{x}^*(t)) \ge \langle -\dot{\bar{x}}^*(t), x - \bar{x}(t) \rangle$ при $x \in X$ и $t \in [t_0, t_1]$. Так как $f^0(t, x, \upsilon) \le \langle \upsilon, w \rangle + f(t, x, w)$ при $w \in X$, то из соотношения 2) следствие 2.1 имеем

$$\langle \bar{x}^*(t), w \rangle + f(t, x, w) - \langle \bar{x}^*(t), \dot{\bar{x}}(t) \rangle - f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \ge \langle -\dot{\bar{x}}^*(t), x - \bar{x}(t) \rangle$$

при $x \in X$, $w \in X$, т. е. $f(t, x, w) - f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \ge \langle -\dot{\bar{x}}^*(t), x - \bar{x}(t) \rangle + \langle -\bar{x}^*(t), w - \dot{\bar{x}}(t) \rangle$ при $x \in X$, $w \in X$. Поэтому $(-\dot{\bar{x}}^*(t), -\bar{x}^*(t)) \in \partial f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$. Обозначив $z^*(t) = -\bar{x}^*(t)$ получим, что

$(\dot z^*(t), z^*(t)) \in \partial f(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$. Из соотношения 3) следствия 2.1 следует, что $(z^*(t_0),-z^*(t_1)) \in \partial\varphi(\bar x(t_0),\bar x(t_1))$. Следствие доказано.

Замечание 2.1. При условиях теоремы 2.1, абсолютно непрерывность меры $q(\cdot)\in frm([t_0,t_1],X^*)$ в теореме 2.1 эквивалентна существованию решения задачи

1) $\dot q(t) \in \partial f^0(t,\bar x(t),\psi(t)+\bar b)$,

2) $f^0(t,\bar x(t),\psi(t)+\bar b) = \langle \psi(t)+\bar b, \dot{\bar x}(t)\rangle + f(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))$,

3) $(-\bar a-\bar b,\bar b)\in\partial\varphi(\bar x(t_0),\bar x(t_1))$,

4) $\int_{t_0}^{t_1}\langle \dot q(t), x(t)\rangle dt = \langle \bar a, x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t_1}\langle\psi(t),\dot x(t)\rangle dt$ при $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$,

где $\psi(\cdot)\in L_{p'}([t_0,t_1],X^*)$, $\bar a,\ \bar b\in X^*$, $t\in[t_0,t_1]$.

3. Невыпуклый случай

Пусть X сеперабельное банахово пространство, $f:[t_0,t_1]\times X\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi: X\times X\to R_{+\infty}$ функция.

Рассмотрим минимизации функционала

$$J(x)=\varphi(x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot x(t))dt \tag{3.1}$$

в $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, где $1\le p<+\infty$. Требуется найти необходимые условия оптимальности решения задачи (3.1).

Пусть $g:X\to R_{+\infty}$, $x_0\in \mathrm{dom}\, g$. Если g липшицева функция вблизи x_0, то положим(см.[11, с.32])

$$g^{[1]}(x_0;x)=\limsup_{y\to x_0,\ \lambda\downarrow 0}\frac{g(y+\lambda x)-g(y)}{\lambda},$$

$$\partial_C g(x_0)=\{x^*\in X^*: g^{[1]}(x_0;x)\ge\langle x^*,x\rangle \text{ при } x\in X\}.$$

Обозначим $\partial_C f(t,x,y)=\partial_C f_t(x,y)$.

Теорема 3.1. Пусть отображение $t\to f(t,x,y)$ измеримо в $[t_0,t_1]$, существуют функции $k(\cdot)\in L_1[t_0,t_1]$ и $c(\cdot)\in L_{p'}[t_0,t_1]$, где $pp'=p+p'$, числа $k_0>0$ и $\alpha>0$ такие, что $|f(t,x,y)-f(t,x_1,y_1)|\le k(t)\|x-x_1\|+c(t)\|y-y_1\|$, $|\varphi(u,z)-\varphi(u_1,z_1)|\le k_0(\|u-u_1\|+\|z-z_1\|)$ при $\|x-\bar x(t)\|\le\alpha$, $\|x_1-\bar x(t)\|\le\alpha$, $y,\ y_1\in X$, $\|u-\bar x(t_0)\|\le\alpha$, $\|u_1-\bar x(t_0)\|\le\alpha$, $\|z-\bar x(T)\|\le\alpha$, $\|z_1-\bar x(T)\|\le\alpha$ и $\bar x(t)$ минимизирует функционал (3.1) в $x\in W_p^1([t_0,t_1],X)$. Тогда существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X^*)$ такая, что

1) $(\dot x^*(t),x^*(t))\in\partial_C f(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$, 2) $(x^*(t_0),-x^*(t_1))\in\partial_C\varphi(\bar x(t_0),\bar x(t_1))$.

Доказательство. В силу $J(\bar x)\le J(x)$ при $x\in W_p^1([t_0,t_1],X)$. Отметим, что функционал $J(x)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $\bar x(\cdot)$ в $W_p^1([t_0,t_1],X)$ (см. лемму 3.3). Поэтому $J^{[1]}(\bar x : x)\ge 0$ при $x\in W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Если $x_n(\cdot) \in L_p([t_0,t_1],X)$ и последовательность $(x_n(\cdot))_{n\in N}$ сходится к $\overline{x}(\cdot)$ в $L_p([t_0,t_1],X),$ то из теоремы 1.4.18 и 1.4.31[5, с.85, с.98] следует, что существует такая последовательность $\{x_m(\cdot)\} \subset \{x_n(\cdot)\}$ и $(x_m(\cdot))_{m\in N}$ почти всюду сходится к $\overline{x}(\cdot)$.

Пусть $(y_m(t))_{m\in N}$ сходится к $\overline{x}(t)$, $(\dot{y}_m(t))_{m\in N}$ почти всюду сходится к $\dot{\overline{x}}(t)$ и $\lambda_m \downarrow 0$, где $y_m(\cdot) \in W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Так как $\frac{1}{\lambda_m}(f(t,(y_m(t),\dot{y}_m(t))+\lambda_m(x(t),\dot{x}(t)))-f(t,y_m(t),\dot{y}_m(t)))-(k(t)\|x(t)\|+c(t)\|\dot{x}(t)\|)\le 0$, то по теореме Фату (см.[12, с.97]) имеем

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{J(y_m+\lambda_m x)-J(y_m)}{\lambda_m}\le \limsup_{m\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\tfrac{1}{\lambda_m}(f(t,(y_m(t),\dot{y}_m(t))+\lambda_m(x(t),\dot{x}(t)))-$$
$$-f(t,y_m(t),\dot{y}_m(t)))dt+\limsup_{m\to\infty}\tfrac{1}{\lambda_m}(\varphi((y_m(t_0),y_m(t_1))+\lambda_m(x(t_0),x(t_1)))-\varphi(y_m(t_0),y_m(t_1)))\le$$
$$\le\int_{t_0}^{t_1}\limsup_{m\to\infty}\tfrac{1}{\lambda_m}(f(t,(y_m(t),z_m(t))+\lambda_m(x(t),\dot{x}(t)))-f(t,y_m(t),z_m(t)))dt+$$
$$+\limsup_{m\to\infty}\tfrac{1}{\lambda_m}(\varphi((y_m(t_0),y_m(t_1))+\lambda_m(x(t_0),x(t_1)))-\varphi(y_m(t_0),y_m(t_1))).$$

Отсюда следует, что

$$J^{[1]}(\overline{x}:x)=\limsup_{\substack{y\to\overline{x}\\ \lambda\downarrow 0}}\frac{J(y+\lambda x)-J(y)}{\lambda}\le\limsup_{\substack{y\to\overline{x}\ \text{в}\ W_p^1\\ \lambda\downarrow 0}}\int_{t_0}^{t_1}\tfrac{1}{\lambda}(f(t,(y(t),\dot{y}(t))+\lambda(x(t),\dot{x}(t)))-$$
$$-f(t,y(t),\dot{y}(t)))dt+\limsup_{\substack{y\to\overline{x}\ \text{в}\ W_p^1\\ \lambda\downarrow 0}}\tfrac{1}{\lambda}(\varphi((y(t_0),y(t_1))+\lambda(x(t_0),x(t_1)))-\varphi(y(t_0),y(t_1)))=$$
$$\le\limsup_{\substack{y\to\overline{x}\ \text{в}\ C\\ \dot{y}\to\dot{\overline{x}}\ \text{в}\ L_p\\ \lambda\downarrow 0}}\int_{t_0}^{t_1}\tfrac{1}{\lambda}(f(t,(y(t),\dot{y}(t))+\lambda(x(t),\dot{x}(t)))-f(t,y(t),\dot{y}(t)))dt+$$
$$+\limsup_{\substack{y\to\overline{x}\ \text{в}\ W_p^1\\ \lambda\downarrow 0}}\tfrac{1}{\lambda}(\varphi((y(t_0),y(t_1))+\lambda(x(t_0),x(t_1)))-\varphi(y(t_0),y(t_1)))\le$$
$$\le\int_{t_0}^{t_1}\limsup_{\substack{y(t)\to\overline{x}(t)\\ z(t)\to\dot{\overline{x}}(t)\\ \lambda\downarrow 0}}\tfrac{1}{\lambda}(f(t,(y(t),z(t))+\lambda(x(t),\dot{x}(t)))-f(t,y(t),z(t)))dt+$$
$$+\limsup_{\substack{(u,\upsilon)\to(\overline{x}(t_0),\overline{x}(t_1))\\ \lambda\downarrow 0}}\tfrac{1}{\lambda}(\varphi((u,\upsilon)+\lambda(x(t_0),x(t_1)))-\varphi(u,\upsilon))\le$$
$$\le\int_{t_0}^{t_1}f^{[1]}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t);(x(t),\dot{x}(t)))dt+\varphi^{[1]}(\overline{x}(t_0),\overline{x}(t_1);(x(t_0),x(t_1)))=\Phi(x).$$

Поэтому $z(t)=0$ минимизирует функционал $\Phi(x)$ в $W_p^1([t_0,t_1],X)$. Так как $\left|f^{[1]}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t);(x(t),\dot{x}(t)))\right|\le k(t)\|x(t)\|+c(t)\|\dot{x}(t)\|$ при $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ и $\left|\varphi^{[1]}(\overline{x}(t_0),\overline{x}(t_1);(x(t_0),x(t_1)))\right|\le k_0(\|x(t_0)\|+\|x(t_1)\|)$, то для $\Phi(x)$ также выполняются условия следствия 2.2. Поэтому существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X^*)$ такая, что выполнены соотношения 1) и 2) следствие 2.2. Теорема доказана.

Рассмотрим другую методику минимизации функционала (3.1).

Лемма 3.1. Если X банахово пространство, функция $\psi: X\to R_{+\infty}$ удовлетворяет условию Липшица в δ окрестности точки x_0, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\alpha>0$, где $\delta\ge\alpha>0$, что $\varphi(x)=\psi(x_0)+\max\limits_{p\in\partial_C\psi(x_0)}\langle p,x-x_0\rangle+\varepsilon\|x-x_0\|+\delta_{B(x_0,\alpha)}(x)$ является внутренней выпуклой аппроксимацией [2, с.60] для $\psi(x)$ в точке x_0, т.е. $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$, $\varphi(x)\ge\psi(x)$ для всех $x\in X$.

Лемма доказана в [13].

Пусть выполняется условие теоремы 3.1. Применяя леммы 3.1 получим, что существует функция $\alpha(t)>0$ и число $\alpha_0>0$ такие, что $\bar{x}(\cdot)$ минимизирует функционал

$$\Phi_\varepsilon(x(\cdot))=\max_{p\in\partial_C\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))}\langle p,(x(t_0)-\bar{x}(t_0),x(t_1)-\bar{x}(t_1))\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\Big(\max_{(p_1(t),p_2(t))\in\partial_C f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))}\langle(p_1(t),p_2(t)),(x(t)-\bar{x}(t),\dot{x}(t)-\dot{\bar{x}}(t))\rangle+$$

$$+\varepsilon\|(x(t)-\bar{x}(t),\ \dot{x}(t)-\dot{\bar{x}}(t))\|\Big)dt+\varepsilon\|(x(t_0)-\bar{x}(t_0),x(t_1)-\bar{x}(t_1))\|$$

при $(x(t_0),x(t_1))\in B((\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1)),\alpha_0)$, $(x(t),\dot{x}(t))\in B((\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)),\alpha(t))$.

Предположим, что для $\varepsilon>0$ существует число $\bar{\alpha}_\varepsilon>0$ такое, что $\alpha(t)\ge\bar{\alpha}_\varepsilon$ при $t\in[t_0,t_1]$. Отметим, что если для $\varepsilon>0$ существует число $\bar{\alpha}_\varepsilon>0$ такое, что $\partial_C f(t,x,y)\subset\partial_C f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+\varepsilon(B_*\times B_*)$ при $(x,\ y)\in B((\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)),\bar{\alpha}_\varepsilon)$, то можно положить $\alpha(t)=\bar{\alpha}_\varepsilon$. Обозначив $z(t)=x(t)-\bar{x}(t)$ имеем, что $\bar{z}(t)=0$ минимизирует функционал

$$\Phi_\varepsilon(z(\cdot))=\max_{p\in\partial_C\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))}\langle p,(z(t_0),z(t_1))\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\Big(\max_{(p_1(t),p_2(t))\in\partial_C f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))}\langle(p_1(t),p_2(t)),(z(t),\dot{z}(t))\rangle+\varepsilon\|(z(t),\dot{z}(t))\|\Big)dt+\varepsilon\|(z(t_0),z(t_1))\|$$

при $(z(t_0),z(t_1))\in B((0,0),\alpha_0)$, $(z(t),\dot{z}(t))\in B((0,0),\bar{\alpha}_\varepsilon)$. Тогда получим, что $\bar{z}(t)=0$ минимизирует функционал $\Phi_\varepsilon(z(\cdot))$ при $z(\cdot)\in W^1_\infty([t_0,t_1],X)=\{x(\cdot)\in C([t_0,t_1],X):\dot{x}(\cdot)\in L_\infty([t_0,t_1],X)\}$.

Лемма 3.2. Пусть выполняется условие теоремы 3.1 и для $\varepsilon>0$ существует число $\bar{\alpha}_\varepsilon>0$ такое, что $\alpha(t)>\bar{\alpha}_\varepsilon$ при $t\in[t_0,t_1]$. Тогда $\bar{z}(t)=0$ минимизирует функционал

$$\Phi_0(z(\cdot))=\max_{p\in\partial_C\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))}\langle p,(z(t_0),z(t_1))\rangle+\int_{t_0}^{t_1}\max_{(p_1(t),p_2(t))\in\partial_C f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))}\langle(p_1(t),p_2(t)),(z(t),\dot{z}(t))\rangle dt$$

при $z(\cdot)\in W^1_\infty([t_0,t_1],X)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует $\tilde{x}(\cdot)\in W^1_\infty([t_0,t_1],X)$ такое, что $\Phi_0(\tilde{x}(\cdot))<0=\Phi_0(0)$, то при достаточно малых $\varepsilon>0$ из определения $\Phi_\varepsilon(z(\cdot))$ следует, что $\Phi_\varepsilon(\tilde{x}(\cdot))<0$. По условию $\bar{z}(t)=0$ минимизирует функционал $\Phi_\varepsilon(z(\cdot))$ в $W^1_\infty([t_0,t_1],X)$ и $\Phi_\varepsilon(\bar{z})=0$. Получим противоречие. Лемма доказана.

Так как $W^1_\infty([t_0,t_1],X)$ плотно в $W^1_p([t_0,t_1],X)$ и $\Phi_0(z(\cdot))$ непрерывная функция в $W^1_p([t_0,t_1],X)$, то имеем (см. доказательство теоремы 3.1), что $\bar{z}(t)=0$ минимизирует функционал $\Phi_0(z(\cdot))$ в $W^1_p([t_0,t_1],X)$, т.е. $\Phi_0(z(\cdot))\ge\Phi_0(0)=0$ при $z(\cdot)\in W^1_p([t_0,t_1],X)$. Поэтому из следствия 2.2 имеем, что верно следующее следствие.

Следствие 3.1. Если выполняется условие теоремы 3.1 и для $\varepsilon>0$ существует число $\bar{\alpha}_\varepsilon>0$ такое, что $\alpha(t)>\bar{\alpha}_\varepsilon$ при $t\in[t_0,t_1]$ и $\bar{x}(t)$ минимизирует функционал (3.1) в $W^1_p([t_0,t_1],X)$, то существует функция $x^*(\cdot)\in W^1_1([t_0,t_1],X^*)$ такая, что

1) $(\dot{x}^*(t),x^*(t))\in\partial_C f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$,

2) $(x^*(t_0),-x^*(t_1))\in\partial_C\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1))$.

Пусть $f_i:[t_0,t_1]\times X\times X\to(-\infty,\infty]$ нормальные интегранты, $\varphi_i: X\times X\to(-\infty,\infty]$ функции, где $i=0,1\ldots,m.$

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_0(x)=\varphi_0(x(t_0),x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),\dot x(t))\,dt \tag{3.2}$$

при следующих ограничениях

$$J_i(x)=\varphi_i(x(t_0),x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),\dot x(t))\,dt\le 0,\quad i=1,\ldots,s, \tag{3.3}$$

$$J_i(x)=\varphi_i(x(t_0),x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),\dot x(t))\,dt=0,\quad i=s+1,\ldots,m, \tag{3.4}$$

где $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Лемма 3.3. Если отображение $t\to f_i(t,x,y)$ измеримо, где $i=0,1,\ldots,m,$ существуют функции $k_i(\cdot)\in L_1([t_0,t_1]$ и $c_i(\cdot)\in L_{p'}([t_0,t_1],$ числа $\lambda_i>0$ и $\alpha>0$ такие, что

$$|f_i(t,x,y)-f_i(t,x_1,y_1)|\le k_i(t)\|x-x_1\|+c_i(t)\|y-y_1\|,\qquad |\varphi_i(u,z)-\varphi_i(u_1,z_1)|\le\lambda_i(\|u-u_1\|+\|z-z_1\|)$$

при $\|x-\bar x(t)\|\le\alpha$, $\|x_1-\bar x(t)\|\le\alpha$, $y,\ y_1\in X$, $\|u-\bar x(t_0)\|\le\alpha$, $\|u_1-\bar x(t_0)\|\le\alpha$, $\|z-\bar x(t_1)\|\le\alpha$, $\|z_1-\bar x(t_1)\|\le\alpha$, то функционалы $J_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица в окрестности точки $\bar x(\cdot)$ в $W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Доказательство. Положим $D=\{x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],\ X):\|x(\cdot)-\bar x(\cdot)\|_{W_p}\le\alpha\}$. Пусть $x(\cdot)$, $x_1(\cdot)\in D$. Так как $\max\limits_{t\in[t_0,t_1]}\|x(t)-x_1(t)\|\le\|x(\cdot)-\bar x(\cdot)\|_{W_p}$ (или $\max\limits_{t_0\le t\le t_1}\|x(t)-x_1(t)\|\le(1+\sqrt[p']{(t_1-t_0)})\|x(\cdot)-x_1(\cdot)\|_{W_p^1}$), то

$$|J_i(x(\cdot))-J_i(x_1(\cdot))|\le\int_{t_0}^{t_1}k_i(t)\|x(t)-x_1(t)\|+c_i(t)\|\dot x(t)-\dot x_1(t)\|)dt+\lambda_i(\|x(t_0)-x_1(t_0)\|+\|x(t_1)-x_1(t_1)\|)\le$$

$$\le\int_{t_0}^{t_1}k_i(t)dt\max_{t\in[t_0,t_1]}\|x(t)-x_1(t)\|+(\int_{t_0}^{t_1}|c_i(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}}(\int_{t_0}^{t_1}\|\dot x(t)-\dot x_1(t)\|^p dt)^{\frac{1}{p}}+\lambda_i(\|x(t_0)-x_1(t_0)\|+\|x(t_1)-x_1(t_1)\|)\le$$

$$\le(\int_0^T k_i(t)dt+2\lambda_i+\|c_i(\cdot)\|_q)\|x(\cdot)-x_1(\cdot)\|_{W_p}.$$

Лемма доказана.

Теорема 3.2. Пусть отображение $t\to f_i(t,x,y)$ измеримо, существуют суммируемая функции $k_i(\cdot)\in L_1([t_0,t_1]$ и $c_i(\cdot)\in L_{p'}([t_0,t_1],$ числа $\lambda_i>0$ и $\alpha>0$ такие, что

$$|f_i(t,x,y)-f_i(t,x_1,y_1)|\le k_i(t)\|x-x_1\|+c_i(t)\|y-y_1\|,\qquad |\varphi_i(u,z)-\varphi_i(u_1,z_1)|\le\lambda_i(\|u-u_1\|+\|z-z_1\|)$$

при $\|x-\bar x(t)\|\le\alpha$, $\|x_1-\bar x(t)\|\le\alpha$, $y,\ y_1\in X$, $\|u-\bar x(t_0)\|\le\alpha$, $\|u_1-\bar x(t_0)\|\le\alpha$, $\|z-\bar x(t_1)\|\le\alpha$, $\|z_1-\bar x(t_1)\|\le\alpha$ и $\bar x(t)$ минимизирует функционал (3.2) в $W_p^1([t_0,t_1],X)$ при ограничениях (3.3) и (3.4). Тогда существуют одновременно не равные нулю числа $\alpha_0\ge 0,$ $\alpha_1\ge 0,\ldots,\alpha_s\ge 0,\ \alpha_{s+1},\ldots,\alpha_m$, где $\alpha_i J_i(\bar x)=0$ при $i=1,\ldots,s,$ и $x^*(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X^*)$ такие, что

1) $(\dot x^*(t),x^*(t))\in\partial_C f(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$,

2) $(x^*(t_0),-x^*(t_1))\in\partial_C\varphi(\bar x(t_0),\bar x(t_1))$,

где $f(t,x,y)=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i f_i(t,x,y)$, $\varphi(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\varphi_i(x,y)$.

Доказательство. Положим $D_0=\{x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X):\|x(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|_{W_p}\le 0{,}5\alpha\}$. Из леммы 3.3 следует, что функционалы $J_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица в окрестности каждой точки множества D_0. Тогда по теореме 10.47 [14] найдутся одновременно не равные нулю числа $\alpha_0\ge 0,\ \alpha_1\ge 0,\dots,\alpha_s\ge 0,\ \alpha_{s+1},\dots,\alpha_m$ такие, что $\alpha_i J_i(\bar{x})=0$ при $i=1,\dots,s$ и $0\in\partial L(\bar{x},\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m)+N_{D_0}(\bar{x})$, где

$$L(x,\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\int_{t_0}^{t_1}f_i(t,x(t),\dot{x}(t))dt+\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\varphi_i(x(t_0),x(t_1)).$$

Отсюда следует, что $0\in\partial L(\bar{x},\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m)$. Тогда получим, что $L^{[1]}(\bar{x};\,x,\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m)\ge 0$ при $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$. Поэтому положив $J(x)=\varphi_0(x(t_0),x(t_1))\ +\ \int_{t_0}^{t_1}f_0(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt$ имеем, что $J^{[1]}(\bar{x};x)\ge 0$ при $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$.
Используя из теоремы Фату аналогично доказательства теоремы 3.1 имеем, что

$$J^{[1]}(\bar{x}:x)=\limsup_{\substack{y\to\bar{x}\\ \lambda\downarrow 0}}\frac{J(y+\lambda x)-J(y)}{\lambda}\le$$

$$\int_{t_0}^{t_1}f^{[1]}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t);(x(t),\dot{x}(t)))dt+\varphi^{[1]}(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1);(x(t_0),x(t_1)))=\Phi(x).$$

Поэтому $z(t)=0$ минимизирует функционал $\Phi(x)$ в $W_p^1([t_0,t_1],X)$. Аналогично доказательства теоремы 3.1 имеем, что для $\Phi(x)$ также выполняются условия следствия 2.2. Поэтому существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([t_0,t_1],X^*)$ такая, что выполнены соотношения 1) и 2) следствия 2.2. Теорема доказана.

4. Необходимые условия оптимальности второго порядка для обобщенной задачи Больца

Пусть X -сепарабельное банахово пространство, $f_i:[t_0,t_1]\times X\times X\to(-\infty,\infty]$ - нормальные интегранты, $\varphi_i:X\times X\to(-\infty,\infty]$ - функции при $i=0,1\dots,m$.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_0(x)=\varphi_0(x(t_0),x(t_1))\ +\ \int_{t_0}^{t_1}f_0(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt \tag{4.1}$$

при следующих ограничениях

$$J_i(x)=\varphi_i(x(t_0),x(t_1))\ +\ \int_{t_0}^{t_1}f_i(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt\le 0,\quad i=1,\dots,s, \tag{4.2}$$

$$J_i(x)=\varphi_i(x(t_0),x(t_1))\ +\ \int_{t_0}^{t_1}f_i(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt=0,\quad i=s+1,\dots,m, \tag{4.3}$$

где $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Положим $P=\{x(\cdot)\in C:J_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,s,\ J_i(x)=0,\ \ i=s+1,\dots,m\}$, где $C\subset W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Обозначим $F_i(x)=\ \psi_i(x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}g_i(t,x(t),\dot{x}(t))dt$, где $g_i:[t_0,t_1]\times X\times X\to(-\infty,\infty]$ - нормальные интегранты и $\psi_i:X\times X\to(-\infty,\infty]$ - функции при $i=0,1\dots,m,\ \ pq=p+q$.

Лемма 4.1. Если f_i и g_i - нормальные интегранты на $[t_0,t_1]\times X\times X$, $\varphi_i : X\times X\to R$, $\psi_i : X\times X\to R$, $\overline{x}(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, где $2\le p<+\infty$, и существуют числа $m_i>0$, $k_i>0$ и $\delta>0$ такие, что

$$\left|f_i(t,\overline{x}(t)+x_1+x_2,\dot{\overline{x}}(t)+z_1+z_2)-f_i(t,\overline{x}(t)+x_1,\dot{\overline{x}}(t)+z_1)-g_i(t,x_1+x_2,z_1+z_2)+g_i(t,x_1,z_1)\right|\le$$
$$\le k_i(\|x_2\|+\|z_2\|)(\|x_1\|+\|z_1\|+\|x_2\|+\|z_2\|)+o_i(t,\|(x_1,z_1)\|^2),$$
$$\left|\varphi_i(\overline{x}(t_0)+x_1+x_2,\overline{x}(t_1)+y_1+y_2)-\varphi_i(\overline{x}(t_0)+x_1,\overline{x}(t_1)+y_1)-\psi_i(x_1+x_2,y_1+y_2)+\psi_i(x_1,y_1)\right|\le$$
$$\le m_i(\|x_2\|+\|y_2\|)(\|x_1\|+\|y_1\|+\|x_2\|+\|y_2\|)+\widetilde{o}_i(\|(x_1,y_1)\|^2)$$

при $\|x_1\|\le\delta$, $\|x_2\|\le\delta$, $\|y_1\|\le\delta$, $\|y_2\|\le\delta$, $z_1,\ z_2\in X$, где $\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t_1}o_i(t,\lambda\|(x_1(t),z_1(t))\|)dt\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$ и $(x_1(\cdot),z_1(\cdot))\in W_p^1([t_0,t_1],X)\times L_p([t_0,t_1],X)$, $\frac{1}{\lambda}\widetilde{o}_i(\lambda)\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$, $o_i(t,0)=0$ и $\widetilde{o}_i(0)=0$, то

$$\left|J_i(\overline{x}+x_1+x_2)-J_i(\overline{x}+x_1)-F_i(x_1+x_2)+F_i(x_1)\right|\le$$
$$\le((m_i(2+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})^2+4k_i(t_1-t_0)(1+\sqrt[q]{t_1-t_0}\ )^2+(t_1-t_0)^{\frac{p-2}{p}}))[\|x_2(\cdot)\|^2_{W_p^1}+\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1}\|x_1(\cdot)\|_{W_p^1}]+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}o_i(t,\|(x_1(t),\dot{x}_1(t))\|^2)dt+\widetilde{o}_i(\|(x_1(t_0),x_1(t_1))\|^2)$$

при $x_1(\cdot),x_2(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, $x_1(t),x_2(t)\in S(0;\delta)=\{x\in X:\|x\|\le\delta\}$.

Доказательство. Так как $\max\limits_{t_0\le t\le t_1}\|x(t)-x_1(t)\|\le(1+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})\|x(\cdot)-x_1(\cdot)\|_{W_p^1}$, то из $x_1(\cdot),x_2(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, $x_1(t),x_2(t)\in S(0;\delta)$ следует, что

$$\left|J_i(\overline{x}+x_1+x_2)-J_i(\overline{x}+x_1)-F_i(x_1+x_2)+F_i(x_1)\right|\le$$
$$\le\left|\varphi_i(\overline{x}(t_0)+x_1(t_0)+x_2(t_0),\ \overline{x}(t_1)+x_1(t_1)+x_2(t_1))-\varphi_i(\overline{x}(t_0)+x_1(t_0),\ \overline{x}(t_1)+x_1(t_1))-\right.$$
$$\left.-\psi_i(x_1(t_0)+x_2(t_0),\ x_1(t_1)+x_2(t_1))+\psi_i(x_1(t_0),\ x_1(t_1))\right|+$$
$$+\left|\int_{t_0}^{t_1}(f_i(t,\overline{x}(t)+x_1(t)+x_2(t),\dot{\overline{x}}(t)+\dot{x}_1(t)+\dot{x}_2(t))-f_i(t,\overline{x}(t)+x_1(t),\dot{\overline{x}}(t)+\dot{x}_1(t)))dt-\right.$$
$$\left.-\int_{t_0}^{t_1}(g_i(t,x_1(t)+x_2(t),\dot{x}_1(t)+\dot{x}_2(t))-g_i(t,x_1(t),\dot{x}_1(t)))dt\right|+\int_{t_0}^{t_1}o_i(t,\|(x_1(t),\dot{x}_1(t))\|^2)dt+\widetilde{o}_i(\|(x_1(t_0),x_1(t_1))\|^2)\,.$$

Так как $\|x_2(t_1)\|\le\|x_2(t_0)\|+\int_{t_0}^{t_1}\|\dot{x}_2(t)\|dt\le(1+\sqrt[q]{t_1-t_0}\ )\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1}$, то по условию имеем

$$\left|J_i(\overline{x}+x_1+x_2)-J_i(\overline{x}+x_1)-F_i(x_1+x_2)+F_i(x_1)\right|\le$$
$$m_i(\|x_2(t_0)\|+\|x_2(t_1)\|)(\|x_1(t_0)\|+\|x_1(t_1)\|+\|x_2(t_0)\|+\|x_2(t_1)\|)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}k_i(\|x_2(t)\|+\|\dot{x}_2(t)\|)(\|x_1(t)\|+\|\dot{x}_1(t)\|+\|x_2(t)\|+\|\dot{x}_2(t)\|)dt+\int_{t_0}^{t_1}o_i(t,\|(x_1(t),\dot{x}_1(t))\|^2)dt+\widetilde{o}_i(\|(x_1(t_0),x_1(t_1))\|^2)\le$$
$$\le m_i(\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1}+(1+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1})(\|x_1(\cdot)\|_{W_p^1}+(1+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})\|x_1(\cdot)\|_{W_p^1}+\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1}+(1+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1})+$$
$$+k_i\int_{t_0}^{t_1}((\|x_2(t)\|+\|\dot{x}_2(t)\|)^2+(\|x_2(t)\|+\|\dot{x}_2(t)\|)(\|x_1(t)\|+\|\dot{x}_1(t)\|))dt+\int_{t_0}^{t_1}o_i(t,\|(x_1(t),\dot{x}_1(t))\|^2)dt+\widetilde{o}_i(\|(x_1(t_0),x_1(t_1))\|^2)\le$$
$$\le m_i(2+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})^2\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1}(\|x_1(\cdot)\|_{W_p^1}+\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1})+k_i[\int_{t_0}^{t_1}(\|x_2(t)\|+\|\dot{x}_2(t)\|)^2dt+$$
$$+(\int_{t_0}^{t_1}(\|x_2(t)\|+\|\dot{x}_2(t)\|)^2dt)^{\frac{1}{2}}(\int_{t_0}^{t_1}(\|x_1(t)\|+\|\dot{x}_1(t)\|)^2dt)^{\frac{1}{2}}]+\int_{t_0}^{t_1}o_i(t,\|(x_1(t),\dot{x}_1(t))\|^2)dt+\widetilde{o}_i(\|(x_1(t_0),x_1(t_1))\|^2).$$

Так как $(a+b)^d\le 2^d(a^d+b^d)$ при $a\ge 0,\ b\ge 0$ и $d\ge 0$, то

$$\int_{t_0}^{t_1}(\|x_2(t)\|+\|\dot{x}_2(t)\|)^2 dt \le \int_{t_0}^{t_1}((1+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1}+\|\dot{x}_2(t)\|)^2 dt \le 4\int_{t_0}^{t_1}((1+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})^2\|x_2(\cdot)\|^2_{W_p^1}+\|\dot{x}_2(t)\|^2)dt \le$$

$$\le 4((t_1-t_0)(1+\sqrt[q]{t_1-t_0}\ )^2+(t_1-t_0)^{\frac{p-2}{p}})\|x_2(\cdot)\|^2_{W_p^1}.$$

Поэтому

$$\left|J_i(\overline{x}+x_1+x_2)-J_i(\overline{x}+x_1)-F_i(x_1+x_2)+F_i(x_1)\right| \le m_i(2+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})^2\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1}(\|x_1(\cdot)\|_{W_p^1}+\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1})+$$

$$+4k_i((t_1-t_0)(1+\sqrt[q]{t_1-t_0}\ )^2+(t_1-t_0)^{\frac{p-2}{p}})[\|x_2(\cdot)\|^2_{W_p^1}+\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1}\|x_1(\cdot)\|_{W_p^1}]+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} o_i(t,\|(x_1(t),\dot{x}_1(t))\|^2)dt+\widetilde{o}_i(\|(x_1(t_0),x_1(t_1))\|^2) \le$$

$$\le ((m_i(2+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})^2+4k_i((t_1-t_0)(1+\sqrt[q]{t_1-t_0}\ )^2+(t_1-t_0)^{\frac{p-2}{p}}))[\|x_2(\cdot)\|^2_{W_p^1}+\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1}\|x_1(\cdot)\|_{W_p^1}]+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} o_i(t,\|(x_1(t),\dot{x}_1(t))\|^2)dt+\widetilde{o}_i(\|(x_1(t_0),x_1(t_1))\|^2)$$

при $x_1(\cdot),x_2(\cdot)\in W_p([t_0,t_1],X)$, $x_1(t),x_2(t)\in S(0;\delta)$. Лемма доказана.

Из леммы 4.1 следует, что верно следующее следствие 4.1.

Следствие 4.1. Если выполняются условие леммы 4.1, $\alpha_0\ge 0, \alpha_1\ge 0,\ldots,\alpha_s\ge 0$, $\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_m$ заданные числа, то

$$\left|\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(J_i(\overline{x}+x_1+x_2)-J_i(\overline{x}+x_1)-F_i(x_1+x_2)+F_i(x_1))\right| \le$$

$$\le (\sum_{i=0}^{m}|\alpha_i|((m_i(2+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})^2+4k_i((t_1-t_0)(1+\sqrt[q]{t_1-t_0}\ )^2+(t_1-t_0)^{\frac{p-2}{p}}))\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1}(\|x_1(\cdot)\|_{W_p^1}+\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1})+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}|\alpha_i|\int_{t_0}^{t_1} o_i(t,\|(x_1(t),\dot{x}_1(t))\|^2)dt+\sum_{i=0}^{m}|\alpha_i|\widetilde{o}_i(\|(x_1(t_0),x_1(t_1))\|^2)$$

при $x_1(\cdot),x_2(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, $\|x_1(\cdot)\|_{W_p^1}\le\overline{\delta}$, $\|x_2(\cdot)\|_{W_p^1}\le\overline{\delta}$, где $\overline{\delta}=(1+\sqrt[q]{t_1-t_0}\ )^{-1}\delta$.

Следствие 4.2. Если выполняются условие леммы 4.1, $F_i(0)=0$ и $\alpha_0\ge 0$, $\alpha_1\ge 0,\ldots,\alpha_s\ge 0$, $\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_m$ заданные числа, то

$$\left|\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(J_i(\overline{x}+x)-J_i(\overline{x})-F_i(x))\right| \le (\sum_{i=0}^{m}|\alpha_i|((m_i(2+\sqrt[q]{(t_1-t_0)})^2+$$

$$4k_i((t_1-t_0)(1+\sqrt[q]{t_1-t_0}\ )^2+(t_1-t_0)^{\frac{p-2}{p}}))\|x(\cdot)\|^2_{W_p^1}$$

при $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$, $\|x(\cdot)\|_{W_p^1}\le\overline{\delta}$, где $\overline{\delta}=(1+\sqrt[q]{t_1-t_0}\ )^{-1}\delta.$

Пусть $\overline{x}(\cdot)\in P$, $P\subset W_P^1([t_0,t_1],X)$ и $R(\cdot):W_P^1([t_0,t_1],X)\to R$. Положим (см.[15])

$K_{\alpha,\mu}(\overline{x}(\cdot);P,R(\cdot))=\{x\in W_P^1([t_0,t_1],X):\ \exists\lambda_x>0,\ \exists o_1(x,\lambda):[0,\lambda_x]\to W_P^1([t_0,t_1],X),\ \exists o_2(x,\lambda):[0,\lambda_x]$

где $\dfrac{o_1(x,\lambda)}{\lambda^{\alpha}}\to 0$ и $\dfrac{o_2(x,\lambda)}{\lambda^{\mu}}\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$, что $\overline{x}+\lambda x+o_1(x,\lambda)\in P,\ R(\lambda x+o_1(x,\lambda))\le o_2(x,\lambda)$ при $\lambda\in[0,\lambda_x]\}$,

$T_{\alpha,\mu}(\overline{x}(\cdot);P,R(\cdot))=\{x\in W_P^1([t_0,t_1],X):\ \exists o(x,\lambda):[0,\lambda_x]\to R_+$, где $\dfrac{o(x,\lambda)}{\lambda^{\mu}}\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$ и $\exists\lambda_i\downarrow 0,\quad \exists\upsilon_i\subset W_P^1([t_0,t_1],X)$, где $\dfrac{1}{\lambda_i^{\alpha-1}}\|\upsilon_i-x\|_{W_p^1}\to 0$ при $i\to+\infty$, что $\overline{x}+\lambda_i\upsilon_i\in P,\ R(\lambda_i\upsilon_i)\le o(x,\lambda_i)$ при $i\in N\}$.

Из теоремы 3.4[15] и из доказательства следствия 2.2[15] следует, что верна следующая теорема 4.1.

Теорема 4.1. Если f_i и g_i - нормальные интегранты на $[t_0,t_1]\times X\times X$, $\overline{x}(\cdot)\in P$ минимизирует функционал (4.1) в P, $\varphi_i: X\times X\to R$, $\psi_i: X\times X\to R$ и существуют числа $m_i>0$, $k_i>0$ и $\delta>0$ такие, что

$$\left|f_i(t,\overline{x}(t)+x_1+x_2,\dot{\overline{x}}(t)+z_1+z_2)-f_i(t,\overline{x}(t)+x_1,\dot{\overline{x}}(t)+z_1)-g_i(t,x_1+x_2,z_1+z_2)+g_i(t,x_1,z_1)\right|\le$$
$$\le k_i(\|x_2\|+\|z_2\|)(\|x_1\|+\|z_1\|+\|x_2\|+\|z_2\|)+o_i(t,\|(x_1,z_1)\|^2),$$
$$\left|\varphi_i(\overline{x}(t_0)+x_1+x_2,\overline{x}(t_1)+y_1+y_2)-\varphi_i(\overline{x}(t_0)+x_1,\overline{x}(t_1)+y_1)-\psi_i(x_1+x_2,y_1+y_2)+\psi_i(x_1,y_1)\right|\le$$
$$\le m_i(\|x_2\|+\|y_2\|)(\|x_1\|+\|y_1\|+\|x_2\|+\|y_2\|)+\widetilde{o}_i(\|(x_1,y_1)\|^2)$$

для $\|x_1\|\le\delta$, $\|x_2\|\le\delta$, $\|y_1\|\le\delta$, $\|y_2\|\le\delta$, $z_1\in X$, $z_2\in X$, где $\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t_1}o_i(t,\lambda\|(x_1(t),z_1(t))\|)dt\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$ и $(x_1(\cdot),z_1(\cdot))\in W_p^1([t_0,t_1],X)\times L_p([t_0,t_1],X)$, $\frac{1}{\lambda}\widetilde{o}_i(\lambda)\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$, $o_i(t,0)=0$ и $\widetilde{o}_i(0)=0$, $o_i(t,\lambda)=0$ и $\widetilde{o}_i(\lambda)=0$ при $i=s+1,\ldots,m$, $J_i(\overline{x})=0$ при $i=1,\ldots,s$, $F_i(x)$ сублинейные непрерывные функции при $i=1,\ldots,s$ и $F_i(x)$ линейные непрерывные функции при $i=s+1,\ldots,m$ в $W_p^1([t_0,t_1],X)$, $(F_{s+1},\ldots,F_m)(W_P^1([t_0,t_1],X))=R^{m-s}$, $C\subset W_P^1([t_0,t_1],X)$ и $I_C(\overline{x})\ne\varnothing$, где $2\le p<+\infty$, то существуют одновременно не равные нулю числа $\alpha_0\ge 0$, $\alpha_1\ge 0,\ldots,\alpha_s\ge 0$, $\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_m$ такие, что $\sum_{i=0}^{m}\alpha_i F_i(x)\ge 0$ при $x\in T_C(\overline{x})$ и

$$J_{0,R}^{\{2\}-}(\overline{x};x)=\varliminf_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\left(\alpha_0 J_0(\overline{x}+\lambda x)-R(\lambda x)-\alpha_0 J_0(\overline{x})\right)\ge 0 \quad \text{при} \quad x(\cdot)\in K_{\alpha,2}(\overline{x}(\cdot);P,R(\cdot)),$$
$$J_{0,R}^{\{2\}+}(\overline{x};x)=\varlimsup_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\left(\alpha_0 J_0(\overline{x}+\lambda x)-R(\lambda x)-\alpha_0 J_0(\overline{x})\right)\ge 0 \quad \text{при} \quad x(\cdot)\in T_{\alpha,2}(\overline{x}(\cdot);P,R(\cdot)),$$

где $R(x)=-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i J_i(\overline{x}+x)+\sum_{i=0}^{m}\alpha_i F_i(x)$, $\alpha\ge 1$.

Рассмотрим задачу минимизации функционала $J_0(x)=\varphi_0(x(t_0),x(t_1))$ + $\int_{t_0}^{t_1}f_0(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt$ при $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$.

Положим $F_0(x)=\psi_0(x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}g_0(t,x(t),\dot{x}(t))dt$.

Следствие 4.3. Если f_0 и g_0 нормальные интегранты на $[t_0,t_1]\times X\times X$, $\overline{x}(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ минимизирует функционал $J_0(x)$ в $W_p^1([t_0,t_1],X)$, $\varphi_0: X\times X\to R$, $\psi_0: X\times X\to R$ и существуют числа $m_0>0$, $k_0>0$ и $\delta>0$ такие, что

$$\left|f_0(t,\overline{x}(t)+x_1+x_2,\dot{\overline{x}}(t)+z_1+z_2)-f_0(t,\overline{x}(t)+x_1,\dot{\overline{x}}(t)+z_1)-g_0(t,x_1+x_2,z_1+z_2)+g_0(t,x_1,z_1)\right|\le$$
$$\le k_0(\|x_2\|+\|z_2\|)(\|x_1\|+\|z_1\|+\|x_2\|+\|z_2\|)+o(t,\|(x_1,z_1)\|^2),$$
$$\left|\varphi_0(\overline{x}(t_0)+x_1+x_2,\overline{x}(t_1)+y_1+y_2)-\varphi_0(\overline{x}(t_0)+x_1,\overline{x}(t_1)+y_1)-\psi_0(x_1+x_2,y_1+y_2)+\psi_0(x_1,y_1)\right|\le$$
$$\le m_0(\|x_2\|+\|y_2\|)(\|x_1\|+\|y_1\|+\|x_2\|+\|y_2\|)+\widetilde{o}(\|(x_1,y_1)\|^2)$$

для $\|x_1\|\le\delta$, $\|x_2\|\le\delta$, $\|y_1\|\le\delta$, $\|y_2\|\le\delta$, $z_1\in X$, $z_2\in X$, где $\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t_1}o(t,\lambda\|(x_1(t),z_1(t))\|)dt\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$ и $(x_1(\cdot),z_1(\cdot))\in W_p^1([t_0,t_1],X)\times L_p([t_0,t_1],X)$, $\frac{1}{\lambda}\widetilde{o}(\lambda)\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$, $F_0(x)$ сублинейная непрерывная функция в $W_p^1([t_0,t_1],X)$, где $2\le p<+\infty$, то $F_0(x)\ge 0$ при $x(\cdot)\in W_p^1([t_0,t_1],X)$ и

$J^{\{2\}-}_{0,F_0}(\bar{x};x)=\underline{\lim}_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\left(J_0(\bar{x}+\lambda x)-F_0(\lambda x)-J_0(\bar{x})\right)\geq 0$ при $x(\cdot)\in K_{\alpha,2}(\bar{x}(\cdot);W^1_p([t_0,t_1],X),F_0)$, $\alpha\geq 1$,

$J^{\{2\}+}_{0,F_0}(\bar{x};x)=\overline{\lim}_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\left(J_0(\bar{x}+\lambda x)-F_0(\lambda x)-J_0(\bar{x})\right)\geq 0$ при $x(\cdot)\in T_{\alpha,2}(\bar{x}(\cdot);W^1_p([t_0,t_1],X),F_0)$, $\alpha\geq 1$.

Справедливость следствие 4.3 следует из теоремы 4.1.

Если $(x,z)\to g_0(t,x,z)$ и $(x,y)\to\psi_0(x,y)$ сублинейные непрерывные функции и $|g_0(t,x,z)|\leq\alpha(t)+\beta(t)\|(x,z)\|$ или $|g_0(t,x,z)|\leq\alpha(t)+c\|(x,z)\|^p$ при $(x,z)\in X\times X$, где $\alpha(\cdot)\in L_1[t_0,t_1]$, $\beta(\cdot)\in L_{p'}[t_0,t_1]$, $c>0$, то $K_{\alpha,2}(\bar{x}(\cdot);W^1_p([t_0,t_1],X),F_0)=\{x(\cdot)\in W^1_p([t_0,t_1],X):F_0(x)\leq 0\}$ при $\alpha\geq 2$. Поэтому $J^{\{2\}-}_{0,F_0}(\bar{x};x)=\underline{\lim}_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\left(J_0(\bar{x}+\lambda x)-F_0(\lambda x)-J_0(\bar{x})\right)\geq 0$ при $x(\cdot)\in W^1_p([t_0,t_1],X)$, $\psi_0(x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}g_0(t,x(t),\dot{x}(t))dt\leq 0$.

Из следствия 4.3 следует, что верно следующее следствие.

Следствие 4.4. Если выполняются условие следствия 4.3, $\bar{x}(\cdot)\in W^1_p([t_0,t_1],X)$ минимизирует функционал $J_0(x)$ в $W^1_p([t_0,t_1],X)$, $F_0(x)$ сублинейная непрерывная функция в $W^1_p([t_0,t_1],X)$, то $\psi_0(x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}g_0(t,x(t),\dot{x}(t))dt\geq 0$ при $x(\cdot)\in W^1_p([t_0,t_1],X)$ и

$$J^{\{2\}-}_{0,F_0}(\bar{x};x)=\underline{\lim}_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\left(J_0(\bar{x}+\lambda x)-F_0(\lambda x)-J_0(\bar{x})\right)\geq 0$$

при $x(\cdot)\in W^1_p([t_0,t_1],X)$, $\psi_0(x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}g_0(t,x(t),\dot{x}(t))dt\leq 0$.

Из следствия 4.4 следует, что $J^{\{2\}-}_{0,F_0}(\bar{x};x)=\underline{\lim}_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\left(J_0(\bar{x}+\lambda x)-F_0(\lambda x)-J_0(\bar{x})\right)\geq 0$ при $x(\cdot)\in W^1_p([t_0,t_1],X)$, $\psi_0(x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}g_0(t,x(t),\dot{x}(t))dt=0$.

Из следствия 4.4 следует, что $\tilde{x}(t)=0$ минимизирует функционал $F_0(x)=\psi_0(x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}g_0(t,x(t),\dot{x}(t))dt$ в $W^1_p([t_0,t_1],X)$.

Следствие 4.5. Если $F_0(x)=\psi_0(x(t_0),x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}g_0(t,x(t),\dot{x}(t))dt\geq 0$ при $x(\cdot)\in W^1_p([t_0,t_1],X)$ $(x,z)\to g_0(t,x,z)$ и $(x,y)\to\psi_0(x,y)$ сублинейные функции и существуют, число $\varepsilon>0$ и суммируемая функция $r(t)>0$, что $\sup_{\|z\|\leq\varepsilon}g_0(t,z,0)\leq r(t)$ в $[t_0,t_1]$, а функция $\psi_0(0,\cdot)$ непрерывна в точке 0, то существует функция $x^*(\cdot)\in W^1_1([t_0,t_1],X^*)$ такая, что

1) $(\dot{x}^*(t),\ x^*(t))\in\partial g_0(t,0,0)$ при $t\in[t_0,t_1]$,
2) $(x^*(t_0),-x^*(t_1))\in\partial\psi_0(0,0)$.

Справедливость следствие 4.5 следует из следствия 2.2.

Если X сеперабельное банахово пространство, то интеграл понимается в смысле Бохнера. Используя другое определение интеграла векторных функций (см.[6, с.89]) полученные результаты можно обобщить и в том случае, когда X пространство Фреше.

Список литературы / References

1. *Садыгов М.А.* О субдифференцируемости интегрального и терминального функционала. // Spirit time. 2020, 8(32). С. 18-32.
2. *Садыгов М.А.* Свойства оптимальных траекторий дифференциальных включений. Канд. диссертация. Баку, 1983. 116 с.
3. *Садыгов М.А.* Исследование негладких оптимизационных задач. Баку: Элм, 2002. 125 с.
4. *Садыгов М.А*. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 359 p.
5. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
6. *Бурбаки Н.* Иитегрирование. М.: Наука, 1970. 320 с.
7. *Обен Ж.П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. 264 с.
8. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.
9. *Иоффе А.Д., Левин В.Л.* Субдифференциалы выпуклых функций. // Труды Московского Математического общества. 1972. Т. 26. С. 3-73.
10. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М*. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
11. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
12. *Федерер Г*. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 760 с.
13. *Садыгов М.А*. Экстремальные задачи для негладких систем. Баку: Изд-во Азерб. технического тн-та, 1996. 148 с.
14. *Clarke F*. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. Springer-Verlag, London, 2013. 591 p.
15. *Садыгов М.А.* Необходимые условия экстремума в задачах математического программирования. // Spirit time, 2020. 2 (14). С. 44-55.

ON THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS OF THE MINIMUM FOR DIFFERENTIAL INCLUSIONS

Sadygov M.A (Republic of Azerbaijan) Email: Sadygov573@scientifictext.ru

Sadygov Misraddin Allahverdi oglu - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL METHODS OF CONTROL THEORY,
FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS,
BAKU STATE UNIVERSITY, BAKU, REPUBLIC OF AZERBAIJAN

Abstract: *the necessary and sufficient conditions for an extremum are obtained for convex extremal problems of differential inclusions in the space of Banach-valued absolute continuous functions. The minimizing function in the general case is not an interior point of the domain of definition of a functional or domain of definition of a differential inclusion. An extremal problem for a differential inclusion with a phase constraint is also considered.*
The extremal problem for differential inclusion is also applied to the linear optimal control problem.
Keywords: *necessary condition, Lipschitz function, subdifferential, inclusion.*

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ МИНИМУМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Садыгов М.А. (Азербайджанская Республика)

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы - доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра математических методов теории управления, механико-матема-тический факультет,
Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджанская Республика

Аннотация: *в работе получены необходимые и достаточные условия экстремума для выпуклых экстремальных задач дифференциальных включений в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций. Минимизирующая функция в общем случае не является внутренней точкой области определения функционала или области определения дифференциального включения. Также рассматривается экстремальная задача для дифференциального включения с фазовым ограничением. Экстремальная задача для дифференциального включения также применяется к линейной задаче оптимального управления.*
Ключевые слова: *необходимое условие, липшицевая функция, субдифференциал, включение.*

1. Введение

В работе применяется единая методика исследования экстремальных задач для дифференциальных включений (см. [1]-[3]). Схема получения необходимых условий состоит из нескольких этапов. Сначала исследуется выпуклая вариационная задача, заданная в соответствующем пространстве. Изучаются субдифференциал интегрального и терминального функцио-нала в пространстве абсолютно непрерывных функций. Хотя выпуклые вариационные задачи изучены разными авторами (см. [4]), но такие задачи не применимы к выпуклым экстремальным задачам для дифференциальных включений. Затем рассматривается выпуклая экстремальная задача для дифференциальных включений.

Изучается непрерывная зависимость решения дифференциального включения от возмущения. Далее используя теоремы о непрерывной зависимости решения включений от возмущения, невыпуклая экстремальная задача для включений приведена к вариационной задаче и получено необходимое условие экстремума.

Работа является обобщением некоторых результатов работ автора в [2, с. 82-106] и [3, с. 263-344], где получены необходимые и достаточные условия минимума для экстремальной задачи дифференциальных включений в пространстве $n-$мерных абсолютно непрерывных функций. В данной работе получено необходимое и достаточное условие экстремума для дифференциальных включений в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций. Работа является продолжением работы [5] автора.

2. О зависимости решений дифференциальных включений от правой части

Пусть X сеперабельное банахово пространство. Обозначим через $\mathrm{comp}(X)$ совокупность всех непустых компактных подмножеств из X с метрикой Хаусдорфа, т.е. если $A, B \in \mathrm{comp}(X)$, то через $\rho_X(A,B)$ абозначим расстояние Хаусдорфа между A и B.

Пусть $a:[0,T]\times X \to 2^X$, где $T>0$, 2^X множество всех подмножеств X, причем $a(t,x)$ компактны при всех $t,\ x$, $1 \le p < +\infty$, $pq = p+q$.

Символом $W_p^1[0,T],X)$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерыв-ных функций из $[0,T]$ в X первая производная по Фреше, которых принадлежит $L_p([0,T],X)$, т.е. рассмотрим пространство $W_p^1([0,T],X) = \{x(\cdot)\in C([0,T],X) : \dot{x}(\cdot)\in L_p([0,T],X)\}$ с нормой $\|x(\cdot)\|_{w_p^1} = \|x(0)\| + \left(\int_0^{t_1}\|\dot{x}(t)\|^p dt\right)^{1/p}$ или эквивалентной нормой $\|x(\cdot)\|_{w_p} = \max_{t\in[0,T\}}\|x(t)\| + \left(\int_0^{t_1}\|\dot{x}(t)\|^p dt\right)^{1/p}$.

Решением включения $\dot{x}(t)\in a(t,x(t))$ называется отображение $x(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ удовлетворяющее включение $\dot{x}(t)\in a(t,x(t))$ для почти всех $t\in[0,T]$.

Лемма 2.1. *Пусть* $y(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ и $a(t,x)$ *в области* $t\in[0,T]$, $\|x-y(t)\|\le b$, удовлетворяют условиям:

а) $a(t,x)$ непустое компактное множество, $a(t,x)$ измеримо по t,

в) существует такая функция $k(\cdot)\in L_p[0,T]$, что $\rho_X(a(t,x),a(t,x')) \le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-y(t)\|\le b$, $\|x-y(t)\|\le b$, где ρ_X - хаусдорфово расстояние, $\|y(0)-x_0\|\le\delta<b$ и $d(\dot{y}(t),a(t,y(t))\le p(t)$, где $p(\cdot)\in L_p[0,T]$. Тогда существует такое решение $x(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ задачи $\dot{x}(t)\in a(t,x(t)),\ \ x(0)=x_0,$ что $\|x(t)-y(t)\|\le\xi(t),\ \|\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\|\le k(t)\xi(t)+p(t)$, где $\xi(t)=\delta e^{m(t)}+\int_0^t e^{m(t)-m(s)}p(s)ds,$ $m(t)=\int_0^t k(s)ds,$ при таких $t\in[0,T]$, что $\xi(t)\le b$.

Лемма доказывается аналогично доказательству теоремы 2.1.2 [6, с.41] , если привлечь леммы 2.1.4 [7, с.80] (см.[1, с.80], [2, с.100]).

Если в лемме 2.1 выполняется неравенство $\xi(T)\le b$, то легко проверяется, что

$$\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{W_1^1} \le \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{W_1} \le \max_{0\le t\le T}\xi(t)+\int_0^T(k(t)\xi(t)+p(t))dt \le (1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})(\delta+\int_0^T p(s)ds),$$

$$\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{W_p^1}\le\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{W_p}\le\max_{0\le t\le T}\xi(t)+(\int_0^T(k(t)\xi(t)+p(t))^p dt)^{\frac{1}{p}}\le e^{m(T)}(\delta+\int_0^T p(s)ds)+$$

$$+2(\int_0^T((k(t)\xi(t))^p+(p(t))^p)dt)^{\frac{1}{p}}\le e^{m(T)}(\delta+\int_0^T p(s)ds)+2\sqrt[p]{2}[(\int_0^T(k(t)\xi(t))^p dt)^{\frac{1}{p}}+(\int_0^T(p(t))^p)dt)^{\frac{1}{p}}]\le$$

$$\le e^{m(T)}(1+2\sqrt[p]{2}(\int_0^T(k(t))^p dt)^{\frac{1}{p}})(\delta+\int_0^T p(s)ds)+2\sqrt[p]{2}(\int_0^T(p(t))^p)dt)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le(1+\sqrt[q]{T})(e^{m(T)}(1+2\sqrt[p]{2}(\int_0^T(k(t))^p dt)^{\frac{1}{p}})+2\sqrt[p]{2})(\delta+(\int_0^T(p(t))^p)dt)^{\frac{1}{p}})$$

при $1<p<+\infty$.

Лемма 2.2. Если $x_0(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ решение задачи $\dot x(t)\in a(t,x(t)),\ x(0)=x_0$ и $a(t,x)$ *в области* $t\in[0,T]$, $\|x-x_0(t)\|\le b$, удовлетворяют условиям:

а) $a(t,x)$ непустое компактное множество, $a(t,x)$ измеримо по t,

в) существует такая функция $k(\cdot)\in L_p[0,T]$, что $\rho_X(a(t,x),a(t,x'))\le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-x_0(t)\|\le b$, $\|x-x_0(t)\|\le b$, где ρ_X - хаусдорфово расстояние, то существуют такие $\alpha>0$ и решение $z_s(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ задачи $\dot z(t)\in a(t,z(t))+s(t),\ \ z(0)=x_0$, что $\|z_s(t)-x_0(t)\|\le b$ при $s(\cdot)\in L_p([0,T],X),\ \|s(\cdot)\|_{L_p}\le\alpha,$ $t\in[0,T]$ и $\|x_0(t)-z_s(t)\|\le e^{m(T)}\sqrt[q]{T}\|s(\cdot)\|_{L_p}$,

$\|z_s(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W_p^1}\le 2\sqrt[p]{2}(\sqrt[q]{T}\,e^{m(T)}\|k(\cdot)\|_p+1)\|s(\cdot)\|_{L_p}$, где $m(t)=\int_0^t k(s)ds$.

Доказательство. Ясно, что $\rho_X(a(t,x)+s(t),\ a(t,x')+s(t))\le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x-x_0(t)\|\le b$, $\|x'-x_0(t\|\le b$ и $d(\dot x_0(t),\ a(t,x_0(t))+s(t))\le\|s(t)\|$. Определим число $\alpha>0$ из неравенства $\sqrt[q]{T}e^{m(T)}\alpha\le b$. Тогда по лемме 2.1 решение $z_s(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ задачи $\dot z(t)\in a(t,z(t))+s(t)$, $z(0)=x_0$ при $s(\cdot)\in L_p([0,T],X),\ \|s(\cdot)\|_{L_p}\le\alpha,$ такое, что $\|x_0(t)-z_s(t)\|\le\int_0^T e^{m(t)-m(\tau)}\|s(\tau)\|d\tau\le e^{m(T)}\sqrt[q]{T}\|s(\cdot)\|_{L_p}$ при $t\in[0,T]$, где $m(t)=\int_0^t k(s)ds$.

Из леммы 2.1 получим, что

$$\|z_s(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W_p^1}=(\int_0^T|\dot x_0(t)-\dot z_s(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}\le(\int_0^T(k(t)\int_0^t e^{m(t)-m(\tau)}\|s(\tau)\|d\tau+\|s(t)\|)^p dt)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le 2\sqrt[p]{2}\sqrt[q]{T}(\int_0^T k(t)^p dt)^{\frac{1}{p}}e^{m(T)}\|s(\cdot)\|_{L_p}+2\sqrt[p]{2}\|s(\cdot)\|_{L_p}=2\sqrt[p]{2}\|s(\cdot)\|_{L_p}(\sqrt[q]{T}\,e^{m(T)}\|k(\cdot)\|_p+1),$$

т.е. $\|z_s(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W_p^1}\to 0$ при $\|s(\cdot)\|_{L_p}\to 0$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. Пусть E банахово пространство, $R:[0,T]\to 2^E$ многозначное отображение. Множество всех измеримых сечений $R(t)$ обозначим S_R. Счетное семейство $\{s_k(t)\}_{k=1}^{\infty}\subset S_R$ называется представлением Кастена для $R(t)$, если $cl\bigcup_{k=1}^{\infty}s_k(t)=R(t)$ при п.в. $t\in[0,T]$. Многозначное отображение $R:[0,T]\to 2^E$ будем называть измеримым, если существует представление Кастена. Из определения непосредственно следует, что объединение не более чем счетного семейства измеримых многозначных отображений измеримо и замыкание измеримых отображений измеримо.

Отметим, что имеют разные определения измеримости многозначного отображения. В теореме 1.5.6[8, с.65] (в теореме 1[9, с.64]) доказано, что если $R(t)$ непустое компактное (замкнутое) множество при $t \in [0,T]$, то они совпадают.

Далее измеримость многозачного отображения будем понимать в смысле Кастена.

3. О необходимых и достаточных условиях минимума для выпуклых дифференциальных включений

Пусть X сеперабельное банахово пространство, $f:[0,T]\times X\times X \to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi: X\times X \to R_{+\infty}$ выпуклая функция, $M \subset X$ выпуклое множество, $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное отображение, т.е. измеримое и замкнутозначное отображение и $Q(t)$ выпуклое множество при $t\in[0,T]$, $a:[0,T]\times X \to 2^X$ отображение такое, что $t \to \operatorname{gr} a_t$ измеримо на $[0,T]$, множество gra_t замкнуто и выпукло почти для всех $t\in[0,T]$, причем $a(t,x)$ компактны при всех t,x. Отсюда следует, что $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, где $\omega(t,x,z)=\begin{cases} 0, & \text{если } z\in a(t,x)\\ +\infty, & \text{если } z\notin a(t,x).\end{cases}$

Отметим, что если отображение $x\to a(t,x)$ полунепрерывно сверху и $a(t,x)$ замкнутое множество при всех $t,\ x$, то из предложения 3.1.7[10, с.116] следует, что отображение $x\to a(t,x)$ замкнуто, т.е. множество gra_t замкнуто.

Рассмотрим минимизации функцинала

$$J(x)=\varphi(x(0),x(T))+\int_0^T f(t,x(t),\dot x(t))dt \tag{3.1}$$

среди всех решений задачи

$$\dot x(t)\in a(t,x(t)),\quad x(0)\in M\subset X,\ x(t)\in Q(t),\ x(\cdot)\in W_p^1([0,T],X). \tag{3.2}$$

Решение задачи (3.2), минимизирующее функционал (3.1) среди всех решений задачи (3.2) назовем оптимальным. Требуется найти необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи (3.1), (3.2). Поставленная задача эквивалентна следующей

$$\Phi_0(x)=\int_0^T (f(t,x(t),\dot x(t))+\delta_{Q(t)}(x(t))dt+\varphi(x(0),x(T))+\int_0^T\omega(t,x(t),\dot x(t))dt+\delta_M(x(0))\xrightarrow{x\in W_p^1([0,T],X)}\min, \tag{3.3}$$

где

$$\delta_M(x)=\begin{cases}0: & \text{если } x\in M,\\ +\infty: & \text{если } x\notin M.\end{cases}$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi(x,y)=\int_0^T (f(t,x(t),\dot x(t)+y(t))+\delta_{Q(t)}(x(t)))dt+\varphi(x(0),x(T))+\int_0^T\omega(t,x(t),\dot x(t)+y(t))dt+\delta_M(x(0)),$$

где $y(\cdot)\in L_p([0,T],X)$, $a(t,x)$ компактны при всех $t\in[0,T],\ x\in X$. Положим $h(y)=\inf\limits_{x\in W_p^1([t_0,t_1],X)}\Phi(x,y)$. Из предложения 2.5 [11, с. 28] вытекает, что h выпуклая функция.

Лемма 3.1. Если $\inf\limits_{x\in W_p^1([0,T],X)}\Phi_0(x)$ конечен, $f:[0,T]\times X\times X\to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi: X\times X\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное отображение и $Q(t)$ непустое выпуклое множество при $t \in [0,T]$, $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, отображение $t \to a(t,x)$ измеримо, существуют $\varepsilon > 0$ и решение $x_0(\cdot) \in W_p^1([0,T],X)$ задачи $\dot{x}(t) \in a(t,x(t))$, $x(0)=x_0$, где $x_0 \in M$, такие, что $\{x : \|x_0(t)-x\| \le \varepsilon\} \subset \mathrm{dom}\, a_t$, $\{x : \|x_0(t)-x\| \le \varepsilon\} \subset Q(t)$ и $a(t,x)$ непустое компактное множество при $t \in [0,T]$, $\|x - x_0(t)\| \le \varepsilon$ и существует такая функция $k(\cdot) \in L_p[0,T]$, что $\rho_X(a(t,x),a(t,x')) \le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-x_0(t)\| \le \varepsilon$, $\|x - x_0(t)\| \le \varepsilon$, существует $r(\cdot) \in L_1[0,T]$ и число $c>0$ такие, что $f(t,x_0(t)+z,\upsilon) \le r(t) + c\|\upsilon\|^p$ при $z \in X, \|z\| \le \varepsilon,\ \upsilon \in X$, $t \in [0,T]$, функция $\varphi(x_0,\cdot)$ непрерывна в точке $x_0(T)$, то функция h субдифференцируема в нуле, т.е. задача (3.3) стабильна (см. [4, с.60]).

Доказательство. Обозначим $S(x,y) = \int_0^T (f(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t)) + \delta_{Q(t)}(x(t)))dt$. Пусть $x(\cdot) \in W_p^1([0,T],X)$, $\|x(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W_p} < \varepsilon$, $x(0)=x_0(0)$ и $y(\cdot) \in L_p([0,T],X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_p} < \varepsilon$. Тогда

$$S(x,y) = \int_0^T (f(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t)) + \delta_{Q(t)}(x(t))dt \le \int_0^T (r(t) + c\|\dot{x}(t)+y(t)\|^p)dt \le$$

$$\le \int_0^T r(t)dt + c2^p\int_0^T \|\dot{x}(t)\|^p dt + c2^p\int_0^T \|y(t)\|^p dt \le \int_0^T r(t)dt + c2^p\varepsilon^p + c2^p(\varepsilon + \|x_0(\cdot)\|_{W_p})^p,$$

т.е. $S(x,y) \le M_0$ при $x(\cdot) \in W_p^1([0,T],X)$, $\|x(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W_p} < \varepsilon$, $x(0)=x_0(0)$ и $y(\cdot) \in L_p([0,T],X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_p} < \varepsilon$, где $M_0 = \int_0^T r(t)dt + c2^p\varepsilon^p + c2^p(\varepsilon + \|x_0(\cdot)\|_{W_p})^p$. Так как функция $\varphi(x_0,\cdot)$ непрерывна в точке $x_0(T)$, то существуют такие $\alpha_1 > 0$ и M_1, что $\varphi(x_0,b) \le M_1$ при $\|b - x_0(T)\| < \alpha_1$. Обозначим $\alpha = \min\{\alpha_1,\varepsilon\}$. По лемме 2.2 для $\alpha > 0$ существуют такие $\delta > 0$ и решение x_y задачи $\dot{x}(t) \in a(t,x(t)) - y(t)$, $x(0)=x_0$ при $y(\cdot) \in L_p([0,T],X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_p} \le \delta$, что удовлетворяется неравенство $\|x_y(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W_p} < \alpha$. Поэтому $h(y) = \inf_x \Phi(x,y) \le \Phi(x_y,y) \le M_0 + M_1$ при $y(\cdot) \in L_p([0,T],X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_p} < \delta$. Согласно предложению 1.2.5 [4, с.21], отсюда следует, что функционал h непрерывен в нуле. Тогда из предложения 1.5.2 [4, с.31] следует, что функционал h субдифференцируем в нуле. Лемма доказана.

Пусть $(x_0(\cdot),y_0(\cdot)) \in W_p^1([0,T],X)\times L_p([0,T],X)$. Отметим, что если $f:[0,T]\times X\times X \to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, существует $r(\cdot) \in L_1[0,T]$ и число $c>0$ такие, что $f(t,x_0(t)+z,\upsilon) \le r(t) + c\|\upsilon\|^p$ при $z \in X,\ \|z\| \le \varepsilon,\ \upsilon \in X$, $t \in [0,T]$ и функция $f(t,x_0(t),y_0(t))$ суммируема, то функцинал $\int_0^T f(t,x(t),y(t))dt$ непрерывен в точке $(x_0(\cdot),y_0(\cdot))$ относительно нормированной топологии пространства $W_p^1([0,T],X)\times L_p([0,T],X)$. В частности, если $y_0(t) = \dot{x}_0(t)$, то функцинал $\int_0^T f(t,x(t),y(t))dt$

непрерывен в точке $(x_0(\cdot),\dot{x}_0(\cdot))$ относительно нормированной топологии пространства $W_p^1([0,T],X)\times L_p([0,T],X)$.

Положив $f_1(t,x,y)=f(t,x,y)+\delta_{Q(t)}(x)+\omega(t,x,y)$, $\varphi_1(x(0),x(T))=\varphi(x(0),x(T))+\delta_M(x(0))$ *имеем, что задача (3.1), (3.2) эквивалентна задачу минимизации функционала*

$$J(x)=\varphi_1(x(0),x(T))+\int_0^T f_1(t,x(t),\dot{x}(t))dt \xrightarrow{x\in W_p^1([0,T],X)} \min.$$

Пусть $w\in X,\ \upsilon\in X^*$. *Положим* $f_1^0(t,z,\upsilon)=\inf_{w\in X}\{\langle\upsilon,w\rangle+f_1(t,z,w)\}$. Из условия следует, что $z\to f_1^0(t,z,\upsilon)$ выпуклая функция. Для простоты далее положим $\partial f_1^0(t,z,\upsilon)=\partial_z f_1^0(t,z,\upsilon)$. *Решение задачи (3.1), (3.2) обозначим через* $\bar{x}(t)$, *т.е.* $|J(\bar{x})|<+\infty$ *и* $J(\bar{x})\le J(x)$ *при* $x(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$, *где* $\bar{x}(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$.

Аналогично теореме 2.1[5] доказывается следующая теорема.

Теорема 3.1. Для того, чтобы функция $\bar{x}(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ среди всех функций $x(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ минимизировала функционал (3.3) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot)\in \mathrm{frm}([0,T],X^*)$, функция $\psi(\cdot)\in L_q([0,T],X^*)$ и векторы $\bar{a},\ \bar{b}\in X^*$ такие, что

1) $\dot{q}(t)\in\partial f_1^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+\bar{b})$

2) $f_1^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+\bar{b})=\langle\psi(t)+\bar{b},\dot{\bar{x}}(t)\rangle+f_1(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$

3) $(-\bar{a}-\bar{b},\bar{b})\in\partial\varphi_1(\bar{x}(0),\bar{x}(T))$

4) $\int_0^T\langle x(t),q(dt)\rangle=\langle\bar{a},x(0)\rangle+\int_0^T\langle\psi(t),\dot{x}(t)\rangle dt$ при $x\in W_p^1([0,T],X)$,

5) $\sup_{y\in Q}\int_0^T\langle y(t),q_s(dt)\rangle=\int_0^T\langle\bar{x}(t),q_s(dt)\rangle$,

где $Q=\{y\in W_p^1([0,T],X):J_1(y)=\int_0^T f_1^0(t,y(t),\psi(t)+\bar{b})dt<+\infty\}$, q_s - сингулярная часть меры q, а если выполнено условие леммы 3.1, функция $t\to\|a(t,x_0(t))\|$ принадлежит в $L_p[0,T]$ и $\operatorname{int}_{C_p^1}\operatorname{dom}J_1=\operatorname{int}_{W_p^1}\operatorname{dom}J_1$, то соотношения 1)-5) и являются необходимыми.

Отметим, что если $\upsilon(\cdot)\in L_q([0,T],X^*)$, то из предложения 2.5 [11, с.28] следует, что $y\to f_1^0(t,y,\upsilon(t))$ выпуклый интегрант и аналогична теорему 8.1.4 или предложению 8.1.10 [12, с.348, с.345] ***проверяется, что*** $(t,y)\to f_1^0(t,y,\upsilon(t))$ $L\times B-$измерима. По условию существует функция $k(\cdot)\in L_p[0,T]$ такая, что $\rho_X(a(t,x),a(t,x'))\le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-x_0(t)\|\le\varepsilon$, $\|x-x_0(t)\|\le\varepsilon$ и функция $t\to\|a(t,x_0(t))\|$ принадлежит в $L_p[0,T]$. Поэтому $\|a(t,x_0(t)+z)\|\le\|a(t,x_0(t))\|+k(t)\varepsilon$ при $\|z\|\le\varepsilon$ и если $\|z\|\le\varepsilon$, то

$$f_1^0(t,x_0(t)+z,\upsilon(t))=\inf_{y\in X}\{\langle\upsilon(t),y\rangle+f_1(t,x_0(t)+z,y)\}=$$

$$=\inf_{y\in X}\{\langle\upsilon(t),y\rangle+f(t,x_0(t)+z,y)+\delta_{Q(t)}(x_0(t)+z)+\omega(t,x_0(t)+z,y)\}\le$$

$$\le \inf_{y\in a(t,x_0(t)+z)}\{\|\upsilon(t)\|\|y\|+r(t)+c\|y\|^p\}\le r(t)+\|\upsilon(t)\|(\|a(t,x_0(t))\|+k(t)\varepsilon)+c(\|a(t,x_0(t))\|+k(t)\varepsilon)^p.$$

4. Условия оптимальности для дифференциальных включений

Пусть X сеперабельное банахово пространство, $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi: X\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $a:[0,T]\times X\to 2^X$, отображение $t\to \operatorname{gr} a_t$ измеримо на $[0,T]$, множество $\operatorname{gr} a_t$ замкнуто и выпукло почти для всех $t\in[0,T]$ и $a(t,x)$ компактны при всех $t\in[0,T],\ x\in X$.

Решение $\bar{x}(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ задачи

$$\dot{x}(t)\in a(t,x(t)),\quad x(0)\in M\subset X \tag{4.1}$$

минимизирующее функционал

$$J(x)=\varphi(x(T))+\int_0^T f(t,x(t))dt \tag{4.2}$$

среди всех решений задачи (4.1) в $W_p^1([0,T],X)$ назовем оптимальным. Требуется найти необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи (4.1),(4.2).

Поставленная задача эквивалентна следующей

$$\Phi_0(x)=\int_0^T f(t,x(t))dt+\varphi(x(T))+\int_0^T \omega(t,x(t),\dot{x}(t))dt+\delta_M(x(0))\xrightarrow{x\in W_p^1([0,T],X)}\min, \tag{4.3}$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi(x,y)=\int_0^T f(t,x(t))dt+\varphi(x(T))+\int_0^T \omega(t,x(t),\dot{x}(t)+y(t))dt+\delta_M(x(0)),$$

где $y(t)\in L_p([0,T],X).$ Положим $h(y)=\inf\limits_{x\in W_p^1([0,T],X)}\Phi(x,y)$. Из предложения 2.5 [11, с. 28] следует, что h выпуклая функция в $L_p([0,T],X).$

Лемма 4.1. Если $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, отображения $t\to a(t,x)$ измеримо, существуют $\varepsilon>0$ и решение $x_0(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ задачи $\dot{x}(t)\in a(t,x(t))$, $x(0)=x_0$ при некотором $x_0\in M$, такие, что $\{x:\|x_0(t)-x\|\le\varepsilon\}\subset \operatorname{dom} a_t$ и $a(t,x)$ непустое компактное множество при $t\in[0,T]$, $\|x-x_0(t)\|\le\varepsilon$, существует такая функция $k(\cdot)\in L_p[0,T]$, что $\rho_X(a(t,x),a(t,x'))\le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-x_0(t)\|\le\varepsilon$, $\|x-x_0(t)\|\le\varepsilon$, $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, функционал $J_f(x)=\int_0^T f(t,x(t))dt: W_p^1([0,T],X)\to R_{+\infty}$ непрерывен в точке $x_0(\cdot)$, $\varphi: X\to R_{+\infty}$ выпуклая функция и непрерывна в точке $x_0(T)$, $\inf\limits_{x\in W_p^1([0,T],X)}\Phi_0(x)$ конечна, то функция h субдифференцируема в нуле, т.е. задача (4.3) стабильна.

Доказательство. Из непрерывности функционала $J_f(x)$ в точке $x_0(\cdot)$ относительно нормированной топологии пространства $W_p^1([0,T],X)$ получим, что существуют $\alpha_1>0$ и M_1 такие, что $J_f(x)\le M_1$ при $\|x(\cdot)-x_0(\cdot)\|_{W_p}<\alpha_1$. Аналогично, по непрерывности функций

$\varphi(x)$ в точке $x_0(T)$, существуют числа $\alpha_2 > 0$ и M_2 такие, что $\varphi(b) \le M_2$ при $\|b - x_0(T)\| < \alpha_2$. Обозначим $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon\}$. По лемме 2.2 для $\alpha > 0$ существуют такие $\delta > 0$ и решение $x_y \in W_p^1([0,T], X)$ задачи $\dot{x}(t) \in a(t, x(t)) - y(t)$, $x(0) = x_0$ при $y(\cdot) \in L_p([0,T], X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_p} \le \delta$, что удовлетворяется неравенство $\|x_y(\cdot) - x_0(\cdot)\|_{W_p} < \alpha$.

Имеем, что $h(y) = \inf\limits_x \Phi(x, y) \le \Phi(x_y, y) \le M_1 + M_2$ при $y(\cdot) \in L_p([0,T], X)$, $\|y(\cdot)\|_{L_p} < \delta$. Согласно предложению 1.2.5 [4, с.23], отсюда следует, что функционал h непрерывен в нуле. Тогда из предложения 1.5.2 [4, с.31] следует, что функционал h субдифференцируем в нуле. Лемма доказана.

Отметим, что в лемме 4.1 условию непрерывности функционала $J_f(x(\cdot)) = \int_0^T f(t, x(t))dt : W_p^1([0,T], X) \to R_{+\infty}$ в точке $x_0(\cdot) \in W_p^1([0,T], X)$, можно заменить условием- существует $r(\cdot) \in L_1[0,T]$ такая, что $\sup\{f(t, x_0(t) + z) : z \in X, \|z\| \le \varepsilon\} \le r(t)$ при $t \in [0,T]$.

Положим $\omega^0(t, x, y^*) = \min\{\langle y^*, z\rangle : z \in a(t,x)\}$, где $y^* \in X^*$.

Отметим, что $\partial\delta_M(\bar{x}(0)) = N_M(\bar{x}(0))$, где $N_M(\bar{x}(0))$ -нормальный конус к M в точке $\bar{x}(0) \in M$. Кроме того $p \in N_M(\bar{x}(0))$ в том и только в том случае, когда $\max\{\langle p, x\rangle : x \in M\} = \langle p, \bar{x}(0)\rangle$.

Теорема 4.1. Пусть $f : [0,T] \times X \to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi : X \to R_{+\infty}$ функция, M непустое множество, $\omega(t, x, z)$ нормальный интегрант на $[0,T] \times (X \times X)$. Для того, чтобы функция $\bar{x}(\cdot) \in W_p^1([0,T], X)$ среди всех решений задачи (4.1) в $W_p^1([0,T], X)$ минимизировала функционал (4.2) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot) \in \mathrm{frm}([0,T], X^*)$, функция $\psi(\cdot) \in L_q([0,T], X^*)$ и $a, b \in X^*$ такие, что

1) $\dot{q}(t) \in \partial(f(t, \bar{x}(t)) + \omega^0(t, \bar{x}(t), \psi(t) + b)),$

2) $\omega^0(t, \bar{x}(t), \psi(t) + b) = \langle \psi(t) + b, \dot{\bar{x}}(t)\rangle,$

3) $b \in \partial\varphi(\bar{x}(T)),$

4) $-a - b \in \partial\delta_M(\bar{x}(0)),$

5) $\int_0^T \langle x(t), q(dt)\rangle = \langle a, x(0)\rangle + \int_0^T \langle \psi(t), \dot{x}(t)\rangle dt$ при $x \in W_p^1([0,T], X),$

6) $\sup\limits_{y \in Q} \int_0^T \langle y(t), q_s(dt)\rangle = \int_0^T \langle \bar{x}(t), q_s(dt)\rangle,$

где $Q = \{y \in W_p^1([0,T], X) : J_1(y) = \int_0^T f(t, y(t))dt + \int_0^T \omega^0(t, y(t), \psi(t) + b)dt < +\infty\}$, q_s - сингулярная часть меры q, а если $\inf\limits_{x \in W_p^1([0,T],X)} \Phi_0(x)$ конечен, $f : [0,T] \times X \to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi : X \to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $\omega(t, x, z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, отображение $t\to a(t,x)$ измеримо, существуют $\varepsilon>0$ и решение $x_0(\cdot)\in W_p^1[0,T]$ задачи $\dot x(t)\in a(t,x(t))$, $x(0)=x_0$ при некотором $x_0\in M$, такие, что $\{x:\|x_0(t)-x\|\le\varepsilon\}\subset \operatorname{dom} a_t$, $a(t,x)$ непустое компактное множество при $t\in[0,T]$, $\|x-x_0(t)\|\le\varepsilon$, существует такая функция $k(\cdot)\in L_p[0,T]$, что $\rho_X(a(t,x),a(t,x'))\le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-x_0(t)\|\le\varepsilon$, $\|x-x_0(t)\|\le\varepsilon$, функция $t\to\|a(t,x_0(t))\|$ принадлежит в $L_p[0,T]$, существует $r(\cdot)\in L_1[0,T]$ такая, что $\sup\limits_{\|z\|\le\varepsilon} f(t,x_0(t)+z)\le r(t)$ при $t\in[0,T]$, функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0(T)$ и $\operatorname{int}_{C_p^1}\operatorname{dom}J_1=\operatorname{int}_{W_p^1}\operatorname{dom}J_1$, то соотношения 1)-6) являются и необходимыми.

Доказательство. Достаточность теоремы 4.1 непосредственно проверяется.

Необходимость. Из леммы 4.1 вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль. Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [4, с.60, с.62] вытекает, что все решения $\bar x(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ задачи $\inf\{\Phi_0(x): x\in W_p^1([0,T],X)\}$ и все решения $(-\bar z(\cdot))$ задачи $\sup\limits_{z\in L_q([0,T],X^*)}\{-\Phi^*(0,z)\}$ связаны экстремальным соотношением

$$\Phi(\bar x,0)+\Phi^*(0,-\bar z)=0\,. \tag{4.4}$$

Отсюда имеем $\int_0^T f(t,\bar x(t))dt+\varphi(\bar x(T))+\int_0^T\omega(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))dt+\delta_M(\bar x(0))+\Phi^*(0,-\bar z)=0$.

По определению

$$\Phi^*(0,-\bar z)=\sup_{\substack{x\in W_p^1([0,T],X)\\ y\in L_p([0,T],X)}}\left\{-\int_0^T\langle\bar z(t),y(t)\rangle dt-\int_0^T f(t,x(t))dt-\varphi(x(T))-\int_0^T\omega(t,x(t),\dot x(t)+y(t))dt-\delta_M(x(0))\right\}=$$

$$=\sup_{\substack{x\in W_p^1([0,T],X)\\ y\in L_p([0,T],X)}}\left\{-\int_0^T\langle\bar z(t),\dot x(t)+y(t)\rangle dt+\int_0^T\langle\bar z(t),\dot x(t)\rangle dt-\int_0^T f(t,x(t))dt-\varphi(x(T))-\int_0^T\omega(t,x(t),\dot x(t)+y(t))dt-\delta_M(x(0)\right\}=$$

$$=\sup_{x\in W_p^1([0,T],X)}\left\{\int_0^T\langle\bar z(t),\dot x(t)\rangle dt-\int_0^T f(t,x(t))dt-\varphi(x(T))-\int_0^T\omega^0(t,x(t),\bar z(t))dt-\delta_M(x(0))\right\}.$$

Обозначим $J_1(x)=\int_0^T f(t,x(t))dt+\int_0^T\omega^0(t,x(t),\bar z(t))dt,\quad J_2(x)=\varphi(x(T))+\delta_M(x(0))$. Из (4.4) следует, что J_1 и J_2 собственные функционалы. По условию $J_2(x_0(\cdot))$ конечен. Поэтому в частности отсюда получим, что $J_1(x_0(\cdot))>-\infty$.

Из предложения 2.5 [11, с.28] следует, что $x\to f(t,x)+\omega^0(t,x,\bar z(t))$ выпуклый интегрант и аналогична теореме 8.1.4 или предложению 8.1.10 [12, с.348, с.345] ***проверяется, что*** $(t,y)\to f(t,y)+\omega^0(t,y,\bar z(t))$ $L\times B-$измерима. По условию существует функция $k(\cdot)\in L_p[0,T]$ такая, что $\rho_X(a(t,x),a(t,x'))\le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-x_0(t)\|\le\varepsilon$, $\|x-x_0(t)\|\le\varepsilon$, то $\|a(t,x_0(t)+z)\|\le\|a(t,x_0(t))\|+k(t)\varepsilon$ при $\|z\|\le\varepsilon$. Так как функция $t\to\|a(t,x_0(t))\|$ принадлежит в $L_p[0,T]$ и $f(t,x_0(t)+z)+\omega^0(t,x_0(t)+z,\bar z(t))=f(t,x_0(t)+z)+\inf\limits_{y\in a(t,x_0(t)+z)}\langle\bar z(t),y\rangle\le r(t)+\|\bar z(t)\|(\|a(t,x_0(t))\|+k(t)\varepsilon)$

при $\|z\| \le \varepsilon$, то при условии теоремы 4. 1 имеем, что функционал $J_1(x(\cdot))$ непрерывен в точке $x_0(\cdot)$ в $W_p^1([0,T],X)$ и $C_p^1([0,T],X)$. Отсюда следует, что функционал $J_1(x(\cdot))$ непрерывен в $\operatorname{int}_{C_p^1} \operatorname{dom} J_1$ (см. [4], предложению 1.2.5).

Положив $S(x) = \int_0^T f(t,x(t))dt + \varphi(x(T)) + \int_0^T \omega^0(t,x(t),\bar z(t))dt + \delta_M(x(0)$, $\bar z^* = (0,\bar z(\cdot)) \in W_p^1([0,T],X)^*$, имеем, что $\Phi^*(0,-\bar z) = S^*(\bar z^*)$. Используя неравенство Юнга-Фенхелья получим

$$S^*(\bar z^*) \ge \int_0^T \langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \rangle dt - S(\bar x), \qquad S(\bar x) \le \int_0^T \langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \rangle dt + \Phi_0(\bar x),$$

то отсюда получим, что

$$S^*(\bar z^*) \ge \int_0^T \langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \rangle dt - S(\bar x) \ge -\Phi_0(\bar x).$$

Поэтому из соотношения (4.4) следует, что

$$S^*(\bar z^*) = \int_0^T \langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \rangle dt - S(\bar x), \quad S(\bar x) = \int_0^T \langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \rangle dt + \Phi_0(\bar x).$$

Из второго соотношения имеем

$$\int_0^T \omega^0(t,\bar x(t),\bar z(t))dt - \int_0^T \omega(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))dt = \int_0^T \langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \rangle dt.$$

Отсюда следует, что $\omega^0(t,\bar x(t),\bar z(t)) - \omega(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t)) = \langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \rangle$ при $t \in [0,T]$. Поэтому $\omega^0(t,\bar x(t),\bar z(t)) = \langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \rangle$ при $t \in [0,T]$. Из равенства $S^*(\bar z^*) = \int_0^T \langle \bar z(t), \dot{\bar x}(t) \rangle dt - S(\bar x)$ вытекает, что $\bar z^* \in \partial_{w_p^1} S(\bar x)$. Из теоремы 0.3.3[12, с.59] имеем, что $\partial_{w_p^1} S(\bar x) = \partial_{w_p^1} J_1(\bar x) + \partial_{w_p^1} J_2(\bar x)$. Тогда найдутся точки $\bar z_i^* \in W_p^1([0,T],X)^*$, $i = 1,2;$ такие, что $\bar z^* = \bar z_1^* + \bar z_2^*$, $\bar z_1^* = (a,\psi(\cdot))$, $\bar z_2^* = (d,b)$ и $\bar z_1^* \in \partial_{w_p^1} J_1(\bar x)$, $\bar z_2^* \in \partial_{W_p^1} J_2(\bar x)$. Так как $\bar z_1^* \in \partial_{W_p^1} J_1(\bar x)$, то $J_1'(\bar x;y)$ собственный функционал в $C_p^1([0,T],X)$. Используя следствию 3.5 [13] имеем, что $\operatorname{cl}_{C_p^1} J_1'(\bar x;y) = \operatorname{cl}_{W_p^1} J_1'(\bar x;y).$ Тогда из следствия 3.3 [13] вытекает, что $\partial_{W_p^1} J_1(\bar x) = \partial_{C_p^1} J_1(\bar x)$.

Поэтому существует функционал $\bar z_q^* \in C_p^1([0,T],X)^*$ такой, что $\bar z_1^* = \bar z_q^*$, и $\bar z_q^* \in \partial_{C_p^1} J_1(\bar x)$.

По следствию 3.1[13] $\bar z_q^* \in \partial_{C_p^1} J_1(\bar x)$ в том и только в том случае, когда $\dot q(t) \in \partial(f(t,\bar x(t)) + \omega^0(t,\bar x(t),\bar z(t)))$ и $\sup\limits_{y \in Q} \int_0^T \langle y(t),\, q_s(dt) \rangle = \int_0^T \langle \bar x(t),\, q_s(dt) \rangle$, где $q_s(\cdot)$ син-гулярная часть меры $q(\cdot)$. Ясно, что $(0,\bar z(\cdot)) = (a,\psi(\cdot)) + (d,b)$ и $\langle a, x(0) \rangle + \int_0^T \langle \psi(t), \dot x(t) \rangle dt = \; = \int_0^T \langle x(t),\, q(dt) \rangle$ для любого $x \in W_p^1([0,T],X)$. Поэтому $\bar z(t) = \psi(t) + b, \quad a + d = 0.$

Так как $\bar z_2^* \in \partial_{W_p^1} J_2(\bar x)$, то из теоремы 4.1 [13] следует, что $\bar z_2^* = (d,b)$, где $b \in X^*$ и $(d-b,b) \in \partial\bar\varphi(\bar x(0),\bar x(T)),$ где $d = -a$, $\bar\varphi(x,y) = \delta_M(x) + \varphi(y)$. Теорема доказана.

Если функционал $(t,x)\to f(t,x)+\omega^0(t,x,\bar z(t))$ выпуклый нормальный интегрант, то из леммы 3.4 [13] следует, что $\operatorname{int}_{C_p^1}\operatorname{dom}J_1=\operatorname{int}_{W_p^1}\operatorname{dom}J_1$.

Пусть выполняется условия теоремы 4.1, $a(t,x)$ непустое компактное множество при $t\in[0,T]$, $x\in X$ и существует функция $\lambda(\cdot)\in L_p[0,T]$ такая, что $\|a(t,x)\|\le\lambda(t)(1+\|x\|)$ при $t\in[0,T]$, $x\in X$. Тогда $\omega^0(t,x,\bar z(t))=\inf\limits_{y\in a(t,x)}\langle\bar z(t),y\rangle\le\|\bar z(t)\|\lambda(t)(1+\|x\|)$ при $t\in[0,T]$, $x\in X$. Поэтому $x\to\omega^0(t,x,\bar z(t))$ непрерывная функция. Отсюда следует, что $(t,y)\to f(t,y)+\omega^0(t,y,\bar z(t))$ выпуклый нормальный интегрант.

Если при $x_0(t)=\bar x(t)$ удовлетворяется условие теоремы 4.1, то из теоремы 3.2[13] следует, что $q(\cdot)$ абсолютно непрерывная мера. Тогда имеем

$$\int_0^T\langle x(t),\ q(dt)\rangle=\int_0^T x(t)d(q(t)-q(T))=\langle q(T)-q(0),x(0)\rangle+\int_0^T\langle q(T)-q(t),\dot x(t)\rangle dt$$

при $x\in W_p^1([0,T],X)$. Так как $\int_0^T\langle x(t),\ q(dt)\rangle=\langle a,x(0)\rangle+\int_0^T\langle\psi(t),\dot x(t)\rangle dt$ при $x\in W_p^1([0,T],X)$, то отсюда получим, что $a=q(T)-q(0)$ и $\psi(t)=q(T)-q(t)$. Поэтому $\dot q(t)=-\dot\psi(t)$ и $\psi(0)=a,\ \psi(T)=0$. Обозначив $\bar y^*(t)=\psi(t)+b$ имеем, что $a+b=\bar y^*(0),\ b=\bar y^*(T)$.

Используя из теоремы 3.1[13] или теоремы 3.2[13] в доказательстве теоремы 4.1 имеем, что верно следующее следствие.

Следствие 4.1. Пусть $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi:X\to R_{+\infty}$ функция, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$. Для того, чтобы $\bar x(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ среди всех решений задачи (4.1) в $W_p^1([0,T],X)$ минимизировала функционал (4.2) достаточно, чтобы нашлись функции $\bar y^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такие, что

1) $-\dot{\bar y}^*(t)\in\partial(f(t,\bar x(t))+\omega^0(t,\bar x(t),\bar y^*(t))),$
2) $\omega^0(t,\bar x(t),\bar y^*(t))=\langle\bar y^*(t),\dot{\bar x}(t)\rangle,$
3) $\bar y^*(T)\in\partial\varphi(\bar x(T)),$
4) $\min\{\langle\bar y^*(0),\ x(0)\rangle:x(0)\in M\}=\langle\bar y^*(0),\ \bar x(0)\rangle$,

а если при $x_0(t)=\bar x(t)$ удовлетворяется условие теоремы 4.1, то соотношения 1)-4) являются также необходимыми.

Из следствие 4.1 следует, что верно следующее следствие 4.2.

Следствие 4.2. Пусть $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi:X\to R_{+\infty}$ функция, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$. Для того, чтобы $\bar x(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ среди всех решений задачи (4.1) в $W_p^1([0,T],X)$ минимизировала функционал (4.2) достаточно, чтобы нашлись функция $\bar y^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что

1) $(\dot{\bar y}^*(t),\bar y^*(t))\in\partial(f(t,\bar x(t))+\omega(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t)))$,
2) $-\bar y^*(T)\in\partial\varphi(\bar x(T)),$

3) $\max\{\langle \bar{y}^*(0),\ x(0)\rangle : x(0)\in M\} = \langle \bar{y}^*(0), \bar{x}(0)\rangle$,

а если при $x_0(t)=\bar{x}(t)$ удовлетворяется условие теоремы 4.1, то соотношения 1)-3) являются также необходимыми.

Если функционал $I_1(\bar{x}(\cdot)) = \int_0^T f(t,\bar{x}(t))dt$ $(I_2(\bar{x}(\cdot)) = \int_0^T \omega^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t))dt)$ непрерывен в точке $\bar{x}(\cdot)$, то из теоремы 3.1[13] (или из теоремы 3.2[13]) следует, что функционал $x_1^* = (a_1,\psi_1)\in W_p^1([0,T],X)^*$ $(x_2^* = (a_2,\psi_2)\in W_p^1([0,T],X)^*)$ принадлежит $\partial_{W_p^1} I_1(\bar{x})$ $(\partial_{W_p^1} I_2(\bar{x}))$ тогда и только тогда, когда функционал x_1^* (x_2^*) "абсолютно непрерывен" и $-\dot{\psi}_1(t)\in\partial f(t,\bar{x}(t))$ $(-\dot{\psi}_2(t)\in\partial\omega^0(t,\bar{x}(t),\bar{z}(t)))$, т.е. $\psi_1\in W_1^1([0,T],X^*)$, $\psi_1(0)=a_1$, $\psi_1(T)=0$. Поэтому из теоремы 0.3.3[12, с.59] и из следствия 4.1 следует, что верно следующее следствие.

Следствие 4.3. Пусть $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi: X\to R_{+\infty}$ функция, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$. Для того, чтобы траектория $\bar{x}(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ среди всех решений задачи (4.1) в $W_p^1([0,T],X)$ минимизировала функционал (4.2) достаточно, чтобы нашлись функции $\bar{x}^*(\cdot),\ \bar{y}^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такие, что

1) $\dot{\bar{x}}^*(t)\in\partial\omega^0(t,\bar{x}(t),\bar{y}^*(t))$,
2) $\omega^0(t,\bar{x}(t),\bar{y}^*(t)) = \langle \bar{y}^*(t),\dot{\bar{x}}(t)\rangle$,
3) $-\dot{\bar{y}}^*(t)-\dot{\bar{x}}^*(t)\in\partial f(t,\bar{x}(t))$,
4) $\bar{y}^*(T)\in\partial\varphi(\bar{x}(T))$,
5) $\min\{\langle \bar{y}^*(0),\ x(0)\rangle : x(0)\in M\} = \langle \bar{y}^*(0), \bar{x}(0)\rangle$,

а если при $x_0(t)=\bar{x}(t)$ удовлетворяется условие теоремы 4.1, то соотношения 1)-5) являются также необходимыми.

Замечание 4.1. Пусть $B(x_0(t),\varepsilon)=\{x\in X:\|x-x_0(t)\|\le\varepsilon\}$ и $a:[0,T]\times B(x_0(t),\varepsilon)\to comp(X)$, где через $comp(X)$ обозначено множество всех непустых компактных подмножеств пространства X. Если отображение $t\to a(t,x)$ измеримо на $[0,T]$ и отображение $x\to a(t,x)$ полунепрерывно сверху в $B(x_0(t),\varepsilon)$ относительно метрики Хаусдорфа, то используя аналог теорему Скорца-Драгони[7,с.14] и из теоремы 1.3.11 [8, с.47] имеем, что $gr\,a_t = \bigcup_{x\in x_0(t)+\varepsilon B}(x,a(t,x))$ измеримо на $[0,T]$. Если $x\to a(t,x)$ полунепрерывно сверху в $\|x-x_0(t)\|\le\varepsilon$, то из теорем 1.2.29 и 1.3.11[8, с.32, 47] имеем, что $gr\,a_t = \bigcup_{x\in x_0(t)+\varepsilon B}(x,a(t,x))$ замкнуто. Поэтому в следствие 4.1 условие $t\to gr\,a_t$ измеримо на $[0,T]$ и множество gra_t замкнуто почти для всех $t\in[0,T]$, можно заменить условием - отображение $t\to a(t,x)$ измеримо на $[0,T]$ и $x\to a(t,x)$ полунепрерывно сверху в $\{x\in X:\|x-x_0(t)\|\le\varepsilon\}$.

Пусть $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное отображение, т.е. измеримое и замкнутозначное отображение и $Q(t)$ выпуклое множество при $t\in[0,T]$. Отметим, что если $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное отображение, то $\delta_Q(t,x)=\delta_{Q(t)}(x)=\begin{cases}0: & \text{если } x\in Q(t),\\ +\infty: & \text{если } x\notin Q(t)\end{cases}$ нормальный интегрант (см. [12, с.347]).
Рассмотрим минимизации функционала

$$J(x)=\varphi(x(T))+\int_0^T f(t,x(t))dt \tag{4.5}$$

среди всех решений задачи

$$\dot{x}(t)\in a(t,x(t)),\quad x(0)\in M\subset X,\ x(t)\in Q(t),\ x(\cdot)\in W_p^1([0,T],X). \tag{4.6}$$

Положив $\bar{f}(t,x)=f(t,x)+\delta_{Q(t)}(x)$ *имеем, что задача (4.5)-(4.6) эквивалентна задаче минимизации функционала* $\widetilde{J}(x)=\varphi(x(T))+\int_0^T\bar{f}(t,x(t))dt$ среди всех решений задачи $\dot{x}(t)\in a(t,x(t)),\quad x(0)\in M\subset X$. Поэтому из теоремы 4.1 имеем, что верно следующее следствие.

Следствие 4.4. Пусть $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi:X\to R_{+\infty}$ функция, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное отображение. Для того, чтобы функция $\bar{x}(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$ среди всех решений задачи (4.6) в $W_p^1([0,T],X)$ минимизировала функционал (4.5) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot)\in frm([0,T],X^*)$, функция $\psi(\cdot)\in L_q([0,T],X^*)$ и векторы $a,b\in X^*$ такие, что

1) $\dot{q}(t)\in\partial(f(t,\bar{x}(t))+\delta_{Q(t)}(\bar{x}(t))+\omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b)),$

2) $\omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b)=\langle\psi(t)+b,\dot{\bar{x}}(t)\rangle,$

3) $b\in\partial\varphi(\bar{x}(T)),$

4) $-a-b\in\partial\delta_M(\bar{x}(0)),$

5) $\int_0^T\langle x(t),\,q(dt)\rangle=\langle a,x(0)\rangle+\int_0^T\langle\psi(t),\dot{x}(t)\rangle dt\quad$ при $x(\cdot)\in W_p^1([0,T],X)$,

6) $\sup_{y\in G}\int_0^T\langle y(t),\,q_s(dt)\rangle=\int_0^T\langle\bar{x}(t),\,q_s(dt)\rangle,$

где $G=\{y\in W_p^1([0,T],X):J_1(y)=\int_0^T(f(t,y(t))+\delta_{Q(t)}(y(t)))dt+\int_0^T\omega^0(t,y(t),\psi(t)+b)dt<+\infty\}$, q_s - сингулярная часть меры q, а если $\inf_{x\in W_p^1([0,T],X)}\Phi_0(x)$ конечен, $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi:X\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное отображение и $Q(t)$ выпуклое множество при $t\in[0,T]$, $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, отображение $t\to a(t,x)$ измеримо, существуют решение $x_0(t)$ задачи $\dot{x}(t)\in a(t,x(t)),\ x(0)=x_0$, где

$x_0 \in M$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\{x : \|x_0(t) - x\| \le \varepsilon\} \subset \operatorname{dom} a_t$, $\{x : \|x_0(t) - x\| \le \varepsilon\} \subset Q(t)$ и $a(t,x)$ непустое компактное множество при $t \in [0,T]$, $\|x - x_0(t)\| \le \varepsilon$ и существует такая функция $k(\cdot) \in L_p[0,T]$, что $\rho_X(a(t,x), a(t,x')) \le k(t)\|x - x'\|$ при $\|x' - x_0(t)\| \le \varepsilon$, $\|x - x_0(t)\| \le \varepsilon$, функция $t \to \|a(t, x_0(t))\|$ принадлежит в $L_p[0,T]$, существует $r(\cdot) \in L_1[0,T]$ такая, что $\sup\{f(t, x_0(t) + z) : z \in X, \|z\| \le \varepsilon\} \le r(t)$ при $t \in [0,T]$, функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0(T)$ и $\operatorname{int}_{C_p^1} \operatorname{dom} J_1 = \operatorname{int}_{W_p^1} \operatorname{dom} J_1$, то соотношения 1)-6) являются и необходимыми.

Отметим, что если $f : [0,T] \times X \to R$, $\operatorname{dom} a_t = X$, существуют функции $\lambda(\cdot) \in L_p[0,T]$ и $\lambda_1(\cdot) \in L_p[0,T]$ такие, что $\|a(t,x)\| \le \lambda(t)(1 + \|x\|)$ и $|f(t,x)| \le \lambda_1(t)(1 + \|x\|)$ при $x \in X$, то $G = \{y(\cdot) \in W_p^1([0,T], X) : y(t) \in Q(t)\}$.

Замечание 4.2. При условие следствия 4.4, абсолютно непрерывность меры $q(\cdot) \in frm([0,T], X^*)$ эквивалентно существованию решений задачи

1) $-\dot{\psi}(t) \in \partial(f(t, \bar{x}(t)) + \delta_{Q(t)}(\bar{x}(t)) + \omega^0(t, \bar{x}(t), \psi(t) + b)),$

2) $\omega^0(t, \bar{x}(t), \psi(t) + b) = \langle \psi(t) + b, \dot{\bar{x}}(t) \rangle,$

3) $b \in \partial\varphi(\bar{x}(T)),$

4) $-\psi(0) - b \in \partial\delta_M(\bar{x}(0)),$ где $\psi(T) = 0$.

5. Линейная задача оптимального управления

Пусть Y сеперабельное банахово пространство, $Q : [0,T] \to \operatorname{conv}(X)$ и $U : [0,T] \to \operatorname{conv}(Y)$ измеримые многозначные отображения, $F : [0,T] \times Y \to X$, где $\operatorname{conv}(V)$ совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств банахово пространства V, $A(t) : X \to X$ линейный оператор.

Рассмотрим минимизации функционала

$$J(x) = \varphi(x(T)) + \int_0^T f(t, x(t))dt \tag{5.1}$$

среди всех решений задачи

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + F(t, u(t)), \quad x(0) \in M \subset X, \tag{5.2}$$

$$x(t) \in Q(t), \quad u(t) \in U(t), \quad x(\cdot) \in W_1^1([0,T], X) \tag{5.3}$$

Положив $a(t,x) = A(t)x + F(t, U(t))$, получим, что задача (5.1)- (5.2) является частным случаем задачи (4.5), (4.6). Поэтому из следствия 4.4 можно получить необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи (5.1)- (5.3) (см. также [3]).

Обозначив $a(t,x) = A(t)x + F(t, U(t))$, рассмотрим минимизации функционала (5.1) среди всех решений задачи $\dot{x}(t) \in a(t, x(t)),$ $x(0) \in M \subset X$, $x(t) \in Q(t)$, $x(\cdot) \in W_1^1([0,T], X)$.

Положив $\omega(t,x,z) = \begin{cases} 0, & z \in a(t,x), \\ +\infty, & z \notin a(t,x), \end{cases}$ имеем, что поставленная задача эквивалентна следующей задаче $J_0(x) = \delta_M(x(0)) + \varphi(x(T)) + \int_0^T (f(t, x(t)) + \delta_{Q(t)}(x(t)) + \omega(t, x(t), \dot{x}(t)))dt$.

$x \in W_p^1([0,T], X)$

$\to \min.$

Лемма 5.1. Если $U:[0,T]\to comp(Y)$ многозначное отображение, отображения $t\to U(t)$, $t\to A(t)$ и $t\to F(t,y)$ измеримы на $[0,T]$, отображение $y\to F(t,y)$ непрерывно, *то* $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$.

Доказательство. Из теоремы 1.5.13 [8, с.77] следует, что $t\to F(t,U(t))$ измеримы на $[0,T]$. Так как $a(t,x)=A(t)x+F(t,U(t))$, то $gra_t=\{(x,y)\in X\times X: y\in A(t)x+F(t,U(t))\}$.

Покажем, что gra_t замкнутое множество. Пусть $(x_n,z_n)\in gra_t$ и $(x_n,z_n)\to(x,z)$. *Ясно, что* $z_n=A(t)x_n+\upsilon_n$, где $\upsilon_n\in F(t,U(t))$. Поэтому $\upsilon_n=z_n-A(t)x_n\to z-A(t)x$ при $n\to+\infty$. Из теоремы 1.2.35[8, с.34] вытекает, что множество $F(t,U(t))$ компактно. Так как $F(t,U(t))$ компактное множество, то имеем, что $z-A(t)x=\upsilon\in F(t,U(t))$, т.е. $z=A(t)x+\upsilon$. Отсюда следует, что $(x,z)\in gra_t$, т.е. gra_t замкнутое множество.

Ясно, что $gra_t=\bigcup\limits_{x\in X}(x,A(t)x+F(t,U(t)))=cl\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(x_i,A(t)x_i+F(t,U(t)))$, где $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ счетное плотное в X множество. Так как $(x_i,A(t)x_i+F(t,U(t))$ *измеримое многозначное отображение, то аналогично предложению 8.1.2[12, с.339]) имеем, что* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(x_i,A(t)x_i+F(t,U(t)))$ *измеримо. Тогда получим, что* $t\to gra_t$ измеримо. Поэтому $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$. Лемма доказана.

Если множество $F(t,U(t))$ *выпукло, то легко проверяется, что* $x\to a(t,x)$ *выпуклое отображение, т.е.* gra_t *-выпукло*е множество.

Следствие 5.1 Пусть $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi:X\to R_{+\infty}$ функция, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное отображение. Для того, чтобы функция $\bar{x}(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ среди всех решений задачи (5.2), (5.3) минимизировала функционал (5.1) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot)\in frm([0,T],X^*)$, функция $\psi(\cdot)\in L_\infty([0,T],X^*)$, $a,b\in X^*$ такие, что

1) $\dot{q}(t)\in\partial(f(t,\bar{x}(t))+\delta_{Q(t)}(\bar{x}(t))+\omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b)),$

2) $\omega^0(t,\bar{x}(t),\psi(t)+b)=\left\langle\psi(t)+b,\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle,$

3) $b\in\partial\varphi(\bar{x}(T)),$

4) $-a-b\in\partial\delta_M(\bar{x}(0)),$

5) $\int_0^T\left\langle x(t),\ q(dt)\right\rangle=\left\langle a,x(0)\right\rangle+\int_0^T\left\langle\psi(t),\dot{x}(t)\right\rangle dt\quad$ при $x\in W_p^1([0,T],X)$,

6) $\sup\limits_{y\in G}\int_0^T\left\langle y(t),\ q_s(dt)\right\rangle=\int_0^T\left\langle\bar{x}(t),\ q_s(dt)\right\rangle,$

где $G=\{y\in W_1^1([0,T],X): J_1(y)=\int_0^T(f(t,y(t))+\delta_{Q(t)}(y(t)))dt+\int_0^T\omega^0(t,y(t),\psi(t)+b)dt<+\infty\},$ q_s - сингулярная часть меры q, а если $\inf J_0(x)$ конечен, $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi: X \to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, $Q(t)$ непустое выпуклое множество при $t\in[0,T]$, $U:[0,T]\to conv(Y)$ многозначное отображение, отображения $t\to U(t)$, $t\to A(t)$ и $t\to F(t,y)$ измеримы на $[0,T]$, отображение $y\to F(t,y)$ непрерывно, $F(t,U(t))$ выпуклое множество, функции $t\to\|F(t,U(t))\|$ и $t\to\|A(t)\|$ суммируемы в $[0,T]$, существуют решение $x_0(t)$ задачи (5.2),(5.3) и $\varepsilon>0$ такие, что $\{x:|x_0(t)-x|\le\varepsilon\}\subset Q(t)$, функция $r(t)=\sup\{f(t,x_0(t)+x): x\in X, \|x\|\le\varepsilon\}$ суммируема в $[0,T]$, функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0(T)$ и $\operatorname{int}_{C_1^1} domJ_1 = \operatorname{int}_{W_1^1} domJ_1$, то соотношения 1)-6) являются и необходимыми.

Доказательство. Из теорем 1.2.35 , 1.3.11 и 1.5.18[8, с.34, 47, 77] следуют, что $a(t,x)$ компактное множество, отображения $t\to a(t,x)$ измеримы, $x\to a(t,x)$ выпуклые и полунепрерывные сверху отображения.

Положив $\bar f(t,x,y)=f(t,x)+\delta_{Q(t)}(x)+\omega(t,x,y)$, имеем, что

$$\bar f^0(t,x,\upsilon)=\inf_{z\in X}\{\langle\upsilon,z\rangle+f(t,x)+\delta_{Q(t)}(x)+\omega(t,x,z)\}=f(t,x)+\delta_{Q(t)}(x)+$$
$$+\inf_{z\in X}\{\langle\upsilon,z\rangle+\omega(t,x,z)\}=f(t,x)+\delta_{Q(t)}(x)+\omega^0(t,x,\upsilon).$$

Поэтому применяя следствию 4.4 имеем справедливость следствия 5.1. Следствие доказано.

По определению

$$\omega^0(t,x,\upsilon)=\inf_{z\in X}\{\langle\upsilon,z\rangle+\omega(t,x,z)\}=\inf\{\langle\upsilon,z\rangle: z\in A(t)x+F(t,U(t))\}=\langle\upsilon,A(t)x\rangle+\inf\{\langle\upsilon,z\rangle: z\in F(t,U(t))\}.$$

Поэтому из соотношения 1) следствия 5.1 вытекает, что $\dot q(t)\in\partial(f(t,\bar x(t))+\delta_{Q(t)}(\bar x(t)))+A^*(t)(\psi(t)+b)$.

Из соотношения 2) следствие 5.1 вытекает, что $\langle\psi(t)+b,A(t)\bar x(t)\rangle+\inf_{z\in X}\{\langle\psi(t)+b,z\rangle: z\in F(t,U(t))\}=\langle\psi(t)+b,\dot{\bar x}(t)\rangle$.

Отсюда имеем, что $\inf\{\langle\psi(t)+b,z\rangle: z\in F(t,U(t))\}=\langle\psi(t)+b,\dot{\bar x}(t)-A(t)\bar x(t)\rangle$. Тогда по теореме 1.5.15[8, с.75] существует такая измеримая функция $\bar u(t)\in U(t)$ такая, что $\dot{\bar x}(t)-A(t)\bar x(t)=F(t,\bar u(t))$. Поэтому $\inf\{\langle\psi(t)+b,z\rangle: z\in F(t,U(t))\}=\langle\psi(t)+b,F(t,\bar u(t))\rangle$. Так как $\partial\delta_M(\bar x(0))=N_M(\bar x(0))$, то из 4) имеем, что $-a-b\in N_M(\bar x(0))$. Таким образом доказано следующее следствие.

Следствие 5.2. Пусть $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi: X\to R_{+\infty}$, M множество, $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное отображение**.** Для того, чтобы функция $(\bar x(t),\bar u(t))$ среди всех решений задачи (5.2), (5.3) минимизировала функционал (5.1) достаточно, чтобы нашлись мера $q(\cdot)\in frm([0,T],X^*)$, функция $\psi(\cdot)\in L_\infty([0,T],X^*)$ и векторы $a,b\in X^*$ такие, что

1) $\dot q(t)\in\partial f(t,\bar x(t))+N_{Q(t)}(\bar x(t))+A^*(t)(\psi(t)+b)$,

2) $\inf\{\langle\psi(t)+b, y\rangle : y\in F(t,U(t))\} = \langle\psi(t)+b, F(t,\bar u(t))\rangle$,

3) $b\in\partial\varphi(\bar x(T))$,

4) $-a-b\in N_M(\bar x(0))$,

5) $\int_0^T\langle x(t),\, q(dt)\rangle = \langle a, x(0)\rangle + \int_0^T\langle\psi(t),\dot x(t)\rangle dt$ при $x\in W_1^1([0,T],X)$,

6) $\sup_{y\in G}\int_0^T\langle y(t),\, q_s(dt)\rangle = \int_0^T\langle\bar x(t),\, q_s(dt)\rangle$,

где $G=\{y\in W_1^1([0,T],X) : J_1(y)=\int_0^T(f(t,y(t))+\delta_{Q(t)}(y(t)))dt+\int_0^T\omega^0(t,y(t),\psi(t)+b)dt<+\infty\}$, q_s - сингулярная часть меры q, а если $\inf J_0(x)$ конечен, $f:[0,T]\times X\to R_{+\infty}$ выпуклый нормальный интегрант, $\varphi: X\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, M выпуклое множество, $\omega(t,x,z)$ выпуклый нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$, $Q(t)$ непустое выпуклое множество при $t\in[0,T]$, $U:[0,T]\to \mathrm{conv}(Y)$ многозначное отображение, отображения $t\to U(t)$, $t\to A(t)$ и $t\to F(t,y)$ измеримы на $[0,T]$, отображение $y\to F(t,y)$ непрерывно, множество $F(t,U(t))$ выпукло, функции $t\to\|F(t,U(t))\|$ и $t\to\|A(t)\|$ суммируемы в $[0,T]$, существуют решение $x_0(t)$ задачи (5.2), (5.3) и $\varepsilon>0$ такие, что $\{x:|x_0(t)-x|\le\varepsilon\}\subset Q(t)$, функция $r(t)=\sup\{f(t,x_0(t)+x): x\in X, \|x\|\le\varepsilon\}$ суммируема в $[0,T]$, функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0(T)$ и $\mathrm{int}_C\,\mathrm{dom}\,J_1=\mathrm{int}_W\,\mathrm{dom}J_1$, то соотношения 1)-6) являются и необходимыми.

Если $f:[0,T]\times X\to R$, существуют суммируемые функции $\lambda(t)$ и $\lambda_1(t)$ такие, что $\|F(t,U(t))\|\le\lambda(t)$ и $|f(t,x)|\le\lambda_1(t)(1+\|x\|)$ при $x\in X$, то $G=\{y(\cdot)\in W_1^1([0,T],X): y(t)\in Q(t)\}$.

Если $q(\cdot)$ абсолютно непрерывная мера, то $\int_0^T\langle x(t),q(dt)\rangle=\int_0^T x(t)d(q(t)-q(T))=\langle q(T)-q(0),x(0)\rangle+\int_0^T\langle q(T)-q(t),\dot x(t)\rangle dt$ при $x\in W_1^1([0,T],X)$. Отсюда получим, что $a=q(T)-q(0)$ и $\psi(t)=q(T)-q(t)$. Поэтому $\dot q(t)=-\dot\psi(t)$ и $\psi(T)=0$. Тогда соотношения 1)-4) следствия 5.2 эквивалентны следующим соотношениям

1) $-\dot\psi(t)\in\partial f(t,\bar x(t))+N_{Q(t)}(\bar x(t))+A^*(t)(\psi(t)+b)$,

2) $\inf\{\langle\psi(t)+b), z\rangle : z\in F(t,U(t))\} = \langle\psi(t)+b, F(t,\bar u(t))\rangle$,

3) $b\in\partial\varphi(\bar x(T))$,

4) $-\psi(0)-b\in N_M(\bar x(0))$,

где $\psi(T)=0$. Обозначив $s(t)=\psi(t)+b$ имеем, что 1) $-\dot s(t)\in\partial f(t,\bar x(t))+N_{Q(t)}(\bar x(t))+A^*(t)s(t)$,

2) $\inf\{\langle s(t),z\rangle : z\in F(t,U(t))\} = \langle s(t), F(t,\bar u(t))\rangle$,

3) $s(T)\in\partial\varphi(\bar x(T))$,

4) $-s(0)\in N_M(\bar x(0))$.

Если X сеперабельное банахово пространство, то интеграл понимается в смысле Бохнера. Используя другое определение интеграла векторных функций (см.[14, с.89]), полученные результаты можно обобщить и в том случае, когда X пространство Фреше.

Список литературы / References

1. *Садыгов М.А.* Свойства оптимальных траекторий дифференциальных включений. Канд. диссертация. Баку, 1983. 116 с.
2. *Садыгов М.А.* Исследование негладких оптимизационных задач. Баку: Элм, 2002. 125 с.
3. *Садыгов М.А.* Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 359 p.
4. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.
5. *Садыгов М.А.* Об обобщенной задаче Больца.// International Scientfic Review, 2020 (в печати).
6. *Садыгов М.А.* Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задаче для включения типа Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 1999. 135 с.
7. *Толстоногов А.А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986. 296 с.
8. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д. и др.* Введение в терию многозначных отображений. Воронеж, 1986. 103 с.
9. *Иоффе А.Д., Левин В.Л.* Субдифференциалы выпуклых функций. //Т руды Математического общества, 1972. 26. С. 3-73.
10. *Обен Ж.П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.:Мир, 1988. 510 с.
11. *Обен Ж.П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. 264 с.
12. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
13. *Садыгов М.А.* О субдифференцируемости интегрального и терминального функционала. // Spirit Time. 2020. 8 (32). С. 18-32.
14. *Бурбаки Н.* Иитегрирование. М.: Наука, 1970. 320 с.

ON THE NECESSARY CONDITIONS OF THE MINIMUM FOR DIFFERENTIAL INCLUSIONS

Sadygov M.A (Republic of Azerbaijan) Email: Sadygov573@scientifictext.ru

Sadygov Misraddin Allahverdi oglu - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL METHODS OF CONTROL THEORY,
FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS,
BAKU STATE UNIVERSITY, BAKU, REPUBLIC OF AZERBAIJAN

Abstract: *the necessary conditions for an extremum are obtained for extremal problems of differential inclusions in the space of Banach-valued absolute continuous functions. Using theorems on the continuous dependence of the solution of inclusions on the perturbation, the nonconvex extremal problem for inclusions is reduced to a variational problem and the necessary extremum condition is obtained. In the paper another form of theorems on the exact penalty of the extremum for nonconvex problems of differential inclusions in the space of Banach-valued absolutely continuous functions and also a necessary condition for a high order extremum are obtained.*

Keywords: *necessary condition, Lipschitz function, differential inclusion.*

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ МИНИМУМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Садыгов М.А. (Азербайджанская Республика)

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математических методов теории управления, механико-математический факультет, Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджанская Республика

Аннотация: *в работе получены необходимые и достаточные условия экстремума для невыпуклых экстремальных задач дифференциальных включений в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций. Используя теоремы о непрерывной зависимости решения включений от возмущения, невыпуклая экстремальная задача для включений приведена к вариационной задаче и получено необходимое условие экстремума. В работе также получен другой вид теорем о точном штрафе экстремума для невыпуклых задач дифференциальных включений в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций и получено необходимое условие экстремума высокого порядка.*
Ключевые слова: *необходимое условие, липшицевая функция, дифференциальное включение.*

1. Введение

В работе используя теоремы о непрерывной зависимости решения включений от возмущения, невыпуклая экстремальная задача для включений приведена к вариационной задаче и получено необходимое условие экстремума. Необходимое условие экстремума получено методом точного штрафа с использованием типа функции расстояния в классах липшицевых функций. В работе с использованием типа функции расстояния в классах $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ локально липшицевых функций в точке, получены другом виде теорем о точном штрафе экстремума для невыпуклых задач дифференциальных включений в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций и также получено необходимое условие экстремума высокого порядка.

Работа является обобщением некоторых результатов работ автора в [1, с.82-106], [2, с.263-344], где получены необходимые и достаточные условия минимума для экстремальной задачи дифференциальных включений в пространстве $n-$мерных абсолютно непрерывных функций. В данной работе получено необходимое условие экстремума для невыпуклых дифференциальных включений в пространстве банаховозначных абсолютно непрерывных функций. Работа является продолжением работ [3] и [4] автора.

2. Невыпуклая экстремальная задача для дифференциальных включений

Пусть X сеперабельное банахово пространство, 2^X множество всех подмножеств X, $f:[0,T]\times X\times X\to R_{+\infty}$ нормальный интегрант, $\varphi: X\times X\to R_{+\infty}$ функция, $M\subset X$ замкнутое множество, $Q:[0,T]\to 2^X$ нормальное многозначное отображение, т.е. измеримое и замкнутозначное отображение, многозначное отображение $a:[0,T]\times X\to 2^X$ такое, что отображение $t\to gr\,a_t$ измеримо на $[0,T]$, множество gra_t замкнуто при $t\in[0,T]$, причем $a(t,x)$ компактны при всех t, x, $T>0$, $1\le p<+\infty$, $pq=p+q$.

Отсюда вытекает, что $\omega(t,x,z)$ нормальный интегрант на $[0,T]\times(X\times X)$.

Положим

$$\psi(t,x,z)=\inf_{u\in a(t,x)}\|u-z\|,\quad \psi_0(t,x)=\inf_{\upsilon\in Q(t)}\|\upsilon-x\|,\quad q(x)=\inf_{y\in M}\|y-x\|.$$

Рассмотрим среди всех решений задачи

$$\dot{x}(t)\in a(t,x(t)),\quad x(0)\in M, \tag{2.1}$$

минимизации функционала

$$J(x)=\varphi(x(0),x(T))+\int_0^T (f(t,x(t),\dot x(t))+\psi_0(t,x(t)))dt. \qquad (2.2)$$

Требуется найти необходимые условия оптимальности решения задачи (2.1), (2.2).

Символом $W_1^1[0,T],X)$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерывных функций из $[0,T]$ в X первая производная по Фреше, которых принадлежит $L_1([0,T],X)$, т.е. обозначим $W_1^1([0,T],X)=\{x(\cdot)\in C([0,T],X):\dot x(\cdot)\in L_1([0,T],X)\}$ с нормой $\|x(\cdot)\|_{W_1^1}=\|x(0)\|+\int_0^{t_1}\|\dot x(t)\|dt$ или эквивалентной нормой $\|x(\cdot)\|_{W_1}=\max_{t\in[0,T]}\|x(t)\|+\int_0^{t_1}\|\dot x(t)\|dt$. Решением включения $\dot x(t)\in a(t,x(t))$ называется отображение $x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ удовлетворяющее включение $\dot x(t)\in a(t,x(t))$ для почти всех $t\in[0,T]$.

Лемма 2.1. *Если* $y(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ и $a(t,x)$ *в области* $t\in[0,T]$, $\|x-y(t)\|\le b$, удовлетворяют условиям:

а) $a(t,x)$ непустое компактное множество, $a(t,x)$ измеримо по t,

в) существует такая функция $k(\cdot)\in L_1[0,T]$, что $\rho_x(a(t,x),a(t,x'))\le k(t)\|x-x'\|$ при $\|x'-y(t)\|\le b$, $\|x-y(t)\|\le b$, где ρ_X - хаусдорфово расстояние, $\|y(0)-x_0\|\le\delta<b$ и $d(\dot y(t),a(t,y(t))\le p(t)$, где $p(\cdot)\in L_1[0,T]$, то существует такое решение $x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ задачи $\dot x(t)\in a(t,x(t)),\ \ x(0)=x_0$, что $\|x(t)-y(t)\|\le\xi(t),\ \|\dot x(t)-\dot y(t)\|\le k(t)\xi(t)+p(t)$, где $\xi(t)=\delta e^{m(t)}+\int_0^t e^{m(t)-m(s)}p(s)ds,\ \ m(t)=\int_0^t k(s)ds,$ при таких $t\in[0,T]$, что $\xi(t)\le b$.

Лемма доказана в [5, с. 49, с.80].

Если в лемме 2.1 выполняется неравенство $\xi(T)\le b$, то легко проверяется, что $\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{W_1^1}\le\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{W_1^1}\le\max_{0\le t\le T}\xi(t)+\int_0^T(k(t)\xi(t)+p(t))dt\le(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})(\delta+\int_0^T p(s)ds)$.

Лемма 2.2. Если $a:[0,T]\times X\to 2^X$, где $a(t,x)$ непустое замкнутое ограниченное множество при $t\in[0,T]$, $\|x-\bar x(t)\|\le\alpha$ и $\rho_X(a(t,x),a(t,x_1))\le k(t)\|x-x_1\|$ при $\|x-\bar x(t)\|\le\alpha$, $\|x_1-\bar x(t)\|\le\alpha$, где $k:[0,T]\to R$, $\bar x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$, то

$|\psi(t,x,y)-\psi(t,x_1,y_1)|\le k(t)\|x-x_1\|+\|y-y_1\|$

при $\|x-\bar x(t)\|\le\alpha$, $\|x_1-\bar x(t)\|\le\alpha$, $y,y_1\in X$.

Лемма 2.2 доказывается аналогично лемме 3.2.2[6, с. 93].

Положим $\omega^0(t,x,y^*)=\inf\{\langle y^*,y\rangle: y\in a(t,x)\}$, где $y^*\in X^*$.

Лемма 2.3. Пусть $a:[0,T]\times X\to 2^X$, где $a(t,x)$ непустое замкнутое ограниченное множество при $t\in[0,T]$, $\|x-\bar x(t)\|\le\alpha$ и $\rho_X(a(t,x),a(t,x_1))\le k(t)\|x-x_1\|$ при $\|x-\bar x(t)\|\le\alpha$, $\|x_1-\bar x(t)\|\le\alpha$, где $k:[0,T]\to R$, $\bar x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$. Тогда

$$\left|\omega^0(t,x,y^*)-\omega^0(t,x_1,y_1^*)\right| \le \{k(t)\max\{\|y^*\|,\|y_1^*\|\}+\|a(t,\bar{x}(t))\|+k(t)\alpha\}(\|x-x_1\|+\|y^*-y_1^*\|)$$ при

$\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $y^*, y_1^* \in X^*$.

Доказательство. По условию имеем

$$\omega^0(t,x,y^*)-\omega^0(t,x_1,y_1^*) = \inf\{\langle y^*,y\rangle : y\in a(t,x)\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x_1)\} \le$$

$$\le \inf\{\langle y^*,y\rangle : y\in a(t,x)\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x)+k(t)\|x-x_1\|B\} \le$$

$$\le \inf\{\langle y^*,y\rangle : y\in a(t,x)\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x)\} + \sup\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in k(t)\|x-x_1\|B\} \le$$

$$\le \sup\{\langle y^*-y_1^*,y\rangle : y\in a(t,x)\} + \sup\{\|y_1^*\|\|z\| : z\in k(t)\|x-x_1\|B\} \le \|y^*-y_1^*\|\|a(t,x)\| + \|y_1^*\|k(t)\|x-x_1\| \le$$

$$\le \|y^*-y_1^*\|(\|a(t,\bar{x}(t))\|+\alpha k(t)) + \max\{\|y^*\|,\|y_1^*\|\}k(t)\|x-x_1\|$$

при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$.

Аналогично получим, что

$$\omega^0(t,x,y^*)-\omega^0(t,x_1,y_1^*) = \inf\{\langle y^*,y\rangle : y\in a(t,x)\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x_1)\} \ge$$

$$\ge \inf\{\langle y^*,y\rangle : y\in a(t,x_1)+k(t)\|x-x_1\|B\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x_1)\} \ge$$

$$\ge \inf\{\langle y^*,y\rangle : z\in a(t,x_1)\} - \inf\{\langle y_1^*,z\rangle : z\in a(t,x_1)\} + \inf\{\langle y^*,z\rangle : z\in k(t)\|x-x_1\|B\} \ge$$

$$\ge -\|y^*-y_1^*\|(\|a(t,\bar{x}(t))\|+\alpha k(t)) - \max\{\|y^*\|,\|y_1^*\|\}k(t)\|x-x_1\|$$ при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$,

$\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$. Поэтому

$$\left|\omega^0(t,x,y^*)-\omega^0(t,x_1,y_1^*)\right| \le \|y^*-y_1^*\|(\|a(t,\bar{x}(t))\|+\alpha k(t)) + \max\{\|y^*\|,\|y_1^*\|\}k(t)\|x-x_1\|$$

при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$.

Отсюда следует, что

$$\left|\omega^0(t,x,y^*)-\omega^0(t,x_1,y_1^*)\right| \le \{\|a(t,\bar{x}(t))\|+\alpha k(t)+k(t)\max\{\|y^*\|,\|y_1^*\|\}\}(\|x-x_1\|+\|y^*-y_1^*\|)$$

при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$. Лемма доказана.

Легко проверяется, что если $x \to a(t,x)$ выпуклое отображение, то $(x,z) \to \psi(t,x,z)$ выпуклая функция.

Рассмотрим задачу

$$\Phi_\nu(x) = \varphi(x(0),x(T)) + \int_0^T (f(t,x(t),\dot{x}(t)) + \psi_0(t,x(t)))dt + \nu(q(x(0)) + \int_0^T \psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt) \xrightarrow{x\in W_1^1([0,T],X)} \min.$$

Решение задачи (2.1), (2.2) обозначим через $\bar{x}(\cdot) \in W_1^1([0,T],X)$ (ясно, что $|\Phi_\nu(\bar{x})| < +\infty$).

Лемма 2.4. Пусть $a(t,x)$ в области $t\in[0,T]$, $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$ удовлетворяет условиям:

а) $a(t,x)$ непустое компактное множество и измеримо по t,

в) существует такая суммируемая функция $k(t)$, что $\rho_X(a(t,x),a(t,x_1)) \le k(t)\|x-x_1\|$ при $\|x-\bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1-\bar{x}(t)\| \le \alpha$. Кроме того пусть M компактное множество и $Q(t)$ непустое компактное множество, $t \to Q(t)$ измеримое отображение, отображение $t \to f(t,x,y)$ измеримо, существуют суммируемая функция $k_1(t)$, числа $c>0$, $k_0>0$ и

$\alpha > 0$ такие, что $|f(t,x,y) - f(t,x_1,y_1)| \le k_1(t)\|x - x_1\| + c\|y - y_1\|$, $|\varphi(u,z) - \varphi(u_1,z_1)| \le k_0(\|u - u_1\| + \|z - z_1\|)$ при $\|x - \bar{x}(t)\| \le \alpha$, $\|x_1 - \bar{x}(t)\| \le \alpha$, $y,\ y_1 \in X$, $\|u - \bar{x}(0)\| \le \alpha$, $\|u_1 - \bar{x}(0)\| \le \alpha$, $\|z - \bar{x}(T)\| \le \alpha$, $\|z_1 - \bar{x}(T)\| \le \alpha$.

Тогда $\bar{x}(\cdot)$ минимизирует функционал $\Phi_\nu(x(\cdot))$ на множестве D ***при*** $\nu \ge L(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})$, где $D = \left\{ x(\cdot) \in W_1^1([0,T],X) : \|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1} < \dfrac{\alpha}{\beta} \right\}$,

$$L = \int_0^T (k_1(t)+1)dt + c + 2k_0, \quad \beta > e^{m(T)}(2 + m(T))^2, \quad m(t) = \int_0^t k(s)ds.$$

Доказательство. Пусть $x(\cdot)$, $x_1(\cdot) \in D$. Так как $\max\limits_{t\in[0,T]}\|x(t) - x_1(t)\| \le \|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1}$, то

$$|J(x(\cdot)) - J(x_1(\cdot))| \le \int_0^T (k_1(t)+1)\|x(t) - x_1(t)\| + c\|\dot{x}(t) - \dot{x}_1(t)\|)dt + k_0(\|x(0) - x_1(0)\| + \|x(T) - x_1(T)\|) \le$$

$$\le \int_0^T (k_1(t)+1)dt \max_{t\in[0,T]}\|x(t) - x_1(t)\| + c\int_0^T \|\dot{x}(t) - \dot{x}_1(t)\|dt + k_0(\|x(0) - x_1(0)\| + \|x(T) - x_1(T)\|) \le$$

$$\le \left(\int_0^T (k_1(t)+1)dt + c + 2k_0\right)\|x(\cdot) - x_1(\cdot)\|_{W_1^1}.$$

Пусть существует $\tilde{x}(\cdot) \in D$ такая, что $\Phi_\nu(\tilde{x}(\cdot)) < \Phi_\nu(\bar{x}(\cdot))$ и пусть точка $x_0 \in M$ такая, что $q(\tilde{x}(0)) = \|\tilde{x}(0) - x_0\|$. Положим $p(t) = \psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))$, $\delta = q(\tilde{x}(0))$. По лемме 2.1 существует решение $x_0(\cdot)$ задачи $\dot{x}(t) \in a(t,x(t))$, $x(0) = x_0$ такое, что

$$\|x_0(\cdot) - \tilde{x}(\cdot)\|_{W_1^1} \le \left(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)}\right)\left(q(\tilde{x}(0)) + \int_0^T \psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))dt\right).$$

Получим, что

$$q(\tilde{x}(0)) + \int_0^T \psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))dt = q(\tilde{x}(0)) - q(\bar{x}(0)) + \int_0^T (\psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t)) - \psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)))dt \le$$

$$\le \|\tilde{x}(0) - \bar{x}(0)\| + \int_0^T (k(t)\|\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)\| + \|\dot{\tilde{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t)\|)dt \le (1 + \int_0^T k(t)dt)\|\tilde{x}(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1} < (1 + \int_0^T k(t)dt)\frac{\alpha}{\beta}.$$

Отсюда следует, что $q(\tilde{x}(0)) + \int_0^T \psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))dt < (1 + \int_0^T k(t)dt)\dfrac{\alpha}{\beta}$. Поэтому

$$\|x_0(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1} \le \left(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)}\right)\left(q(\tilde{x}(0)) + \int_0^T \psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))dt\right) + \|\tilde{x}(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1} \le$$

$$\le \left(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)}\right)(1 + m(T))\frac{\alpha}{e^{m(T)}(2 + m(T))^2} + \frac{\alpha}{e^{m(T)}(2 + m(T))^2} \le \alpha.$$

Положим $\nu \ge L\left(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)}\right)$. Тогда

$$J(x_0) \le J(\tilde{x}) + L\|x_0 - \tilde{x}\|_{W_1^1} \le J(\tilde{x}) + \nu(q(\tilde{x}(0)) + \int_0^T \psi(t,\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))dt) = \Phi_\nu(\tilde{x}) < J(\bar{x}).$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

Так как $e^{m(T)}(1 + \int_0^T k(t)dt)\frac{\alpha}{\beta} \le \alpha - \frac{\alpha}{\beta}$, то из доказательства леммы 3.3 следует, что

$$q(\tilde{x}(0))e^{m(t)} + \int_0^T e^{m(t)-m(s)}\psi(s,\tilde{x}(s),\dot{\tilde{x}}(s))ds \le \alpha - \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{при } \tilde{x}(\cdot) \in D.$$

Пусть $f: X \to R_{+\infty}$, $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Положим (см.[7, с.92]) $f^{[1]}(x_0; x) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup\limits_{\substack{(y,\alpha)\downarrow f^{x_0} \\ t\downarrow 0}} \inf\limits_{z \in x+\varepsilon B} \dfrac{f(y+tz)-\alpha}{t}$,

где символ $(y,\alpha) \downarrow f^{x_0}$ означает, что $(y,\alpha) \in E(f)$, $y \to x_0$, $\alpha \to f(x_0)$.

Отметим, что если f липшицева функция вблизи x_0, то $f^{[1]}(x_0; x) = \limsup\limits_{y \to x_0,\, \lambda \downarrow 0} \dfrac{f(y+\lambda x)-f(y)}{\lambda}$.

Положим $\partial_C f(x_0) = \{x^* \in X^* : f^{[1]}(x_0; x) \geq \langle x^*, x \rangle$ при $x \in X\}$.

Обозначим $\partial_C f(t,x,y) = \partial_C f_t(x,y)$.

Теорема 2.1. Пусть удовлетворяется условие леммы 2.4 и $\bar{x}(t)$ среди всех решений задачи (2.1) минимизирует функционал (2.2). Тогда существует функция $x^*(\cdot) \in W_1^1([0,T], X^*)$ такая, что

1) $(\dot{x}^*(t), x^*(t)) \in \partial_C(f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) + \psi_0(t,\bar{x}(t)) + \nu\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)))$,

2) $(x^*(0), -x^*(T)) \in \partial_C(\varphi(\bar{x}(0),\bar{x}(T)) + \nu q(\bar{x}(0)))$,

где $\nu \geq L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Доказательство. В силу леммы 2.4 $\Phi_\nu(\bar{x}) \leq \Phi_\nu(x)$ для $x \in D$. Поэтому $\Phi_\nu^0(\bar{x}: x) \geq 0$ при $x \in X$. Положив $\bar{f}(t,x,y) = f(t,x,y) + \psi_0(t,x) + \nu\psi(t,x,y)$ и $\bar{\varphi}(x,y) = \varphi(x,y) + \nu q(x)$ имеем, что $\left|\bar{f}(t,x_1,y_1) - \bar{f}(t,x_2,y_2)\right| \leq (\nu k(t) + k_1(t) + 1)\|x_1 - x_2\| + (\nu + c)\|y_1 - y_2\|$,

$|\bar{\varphi}(z_1,u_1) - \bar{\varphi}(z_2,u_2)| \leq (k_0+\nu)\|z_1 - z_2\| + k_0\|u_1 - u_2\|$

при $\|x_1 - \bar{x}(t)\| \leq \alpha$, $\|x_2 - \bar{x}(t)\| \leq \alpha$, $y_1, y_2 \in X$, $\|z_1 - \bar{x}(0)\| \leq \alpha$, $\|z_2 - \bar{x}(0)\| \leq \alpha$, $\|u_1 - \bar{x}(T)\| \leq \alpha$, $\|u_2 - \bar{x}(T)\| \leq \alpha$.

Если $x_n(\cdot) \in L_1([0,T],X)$ и последовательность $(x_n(\cdot))_{n\in N}$ сходится к $\bar{x}(\cdot)$ в $L_1([0,T],X)$, то из теоремы 1.4.18 и 1.4.31[8, с.85, с.98] следует, что существует такая последовательность $\{x_m(\cdot)\} \subset \{x_n(\cdot)\}$ и $(x_m(\cdot))_{m\in N}$ почти всюду сходится к $\bar{x}(\cdot)$.

Пусть $(y_m(t))_{m\in N}$ сходится к $\bar{x}(t)$, $(\dot{y}_m(t))_{m\in N}$ почти всюду сходится к $\dot{\bar{x}}(t)$ и $\lambda_m \downarrow 0$, где $y_m(\cdot) \in W_1^1([0,T],X)$. Так как

$\frac{1}{\lambda_m}(\bar{f}(t,(y_m(t),\dot{y}_m(t)) + \lambda_m(x(t),\dot{x}(t))) - \bar{f}(t,y_m(t),\dot{y}_m(t))) - (\nu k(t) + k_1(t) + 1)\|x(t)\| + (\nu + c)\|\dot{x}(t)\| \leq 0$,

то по теореме Фату (см.[9, с.97]) имеем

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\Phi_\nu(y_m + \lambda_m x) - \Phi_\nu(y_m)}{\lambda_m} \leq \limsup_{m\to\infty} \int_0^T \tfrac{1}{\lambda_m}(\bar{f}(t,(y_m(t),\dot{y}_m(t)) + \lambda_m(x(t),\dot{x}(t))) -$$
$$- \bar{f}(t,y_m(t),\dot{y}_m(t)))dt + \limsup_{m\to\infty} \tfrac{1}{\lambda_m}(\bar{\varphi}((y_m(0),y_m(T)) + \lambda_m(x(0),x(T))) - \bar{\varphi}(y_m(0),y_m(T))) \leq$$

$$\le \int_0^T \limsup_{m\to\infty} \tfrac{1}{\lambda_m}(\bar f(t,(y_m(t),z_m(t))+\lambda_m(x(t),\dot x(t)))-\bar f(t,y_m(t),z_m(t)))dt+$$
$$+\limsup_{m\to\infty}\tfrac{1}{\lambda_m}(\bar\varphi((y_m(0),y_m(T))+\lambda_m(x(0),x(T)))-\bar\varphi(y_m(0),y_m(T))).$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_\nu^{[1]}(\bar x : x)=\limsup_{\substack{y\to\bar x \text{ в } W_1^1\\ \lambda\downarrow 0}} \frac{\Phi_\nu(y+\lambda x)-\Phi_\nu(y)}{\lambda}\le \limsup_{\substack{y\to\bar x \text{ в } W_1^1\\ \lambda\downarrow 0}} \int_0^T \tfrac{1}{\lambda}(\bar f(t,(y(t),\dot y(t))+\lambda(x(t),\dot x(t)))-$$
$$-\bar f(t,y(t),\dot y(t)))dt+\limsup_{\substack{y\to\bar x \text{ в } W_1^1\\ \lambda\downarrow 0}}\tfrac{1}{\lambda}(\bar\varphi((y(0),y(T))+\lambda(x(0),x(T)))-\bar\varphi(y(0),y(T)))=$$
$$=\limsup_{\substack{y\to\bar x \text{ в } C\\ \dot y\to\dot{\bar x} \text{ в } L_1\\ \lambda\downarrow 0}}\int_0^T \tfrac{1}{\lambda}(\bar f(t,(y(t),\dot y(t))+\lambda(x(t),\dot x(t)))-\bar f(t,y(t),\dot y(t)))dt+$$
$$+\limsup_{\substack{y\to\bar x \text{ в } W_1^1\\ \lambda\downarrow 0}}\tfrac{1}{\lambda}(\bar\varphi((y(0),y(T))+\lambda(x(0),x(T)))-\bar\varphi(y(0),y(T)))\le$$
$$\le\int_0^T \limsup_{\substack{y(t)\to\bar x(t)\\ z(t)\to\dot{\bar x}(t)\\ \lambda\downarrow 0}}\tfrac{1}{\lambda}(\bar f(t,(y(t),z(t))+\lambda(x(t),\dot x(t)))-\bar f(t,y(t),z(t)))dt+$$
$$+\limsup_{\substack{(u,\upsilon)\to(\bar x(0),\bar x(T))\\ \lambda\downarrow 0}}\tfrac{1}{\lambda}(\bar\varphi((u,\upsilon)+\lambda(x(0),x(T)))-\bar\varphi(y(0),y(T)))\le$$
$$\le\int_0^T \bar f^{[1]}(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t);(x(t),\dot x(t)))dt+\bar\varphi^{[1]}(\bar x(0),\bar x(T);(x(0),x(T)))=\overline{\Phi}_\nu(x).$$

Поэтому $z(t)=0$ минимизирует функционал $\overline{\Phi}_\nu(x)$ в $W_1^1([0,T],X)$. Легко проверить, что для $\overline{\Phi}_\nu(x)$ также выполняются условия следствия 2.2[3]. Поэтому существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что выполнены соотношения 1) и 2) теоремы 2.1. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть удовлетворяется условие леммы 2.4 и $\bar x(\cdot)$ среди всех решений задачи (2.1) минимизирует функционал (2.2). Тогда существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что

1) $(\dot x^*(t),x^*(t))\in\partial_C(f(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))+\psi_0(t,\bar x(t)))+\partial_C\omega(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))$,

2) $(x^*(0),-x^*(T))\in\partial_C(\varphi(\bar x(0),\bar x(T))+\nu q(\bar x(0)))$

при $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Доказательство. По определению

$$\psi^{[1]}\big(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t);(x,y)\big)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \limsup_{\substack{(z,\omega)\to(\bar x(t),\dot{\bar x}(t))\\ \psi(t,z,\omega)\to 0,\ \lambda\downarrow 0}}\ \inf_{(x_1,y_1)\in(x,y)+\varepsilon B}\frac{\psi(t,(z,\omega)+\lambda(x_1,y_1))-\psi(t,z,\omega)}{\lambda},$$ *где*

$B=\{(x,y)\in X\times Y:\|(x,y)\|\le 1\}$. *Пусть* $u\in a(t,z)$ *такое, что* $\|\omega-u\|=\min_{\upsilon\in a(t,z)}\|\omega-\upsilon\|=\psi(t,z,\omega)$.

Тогда ясно, что $\|u-\dot{\bar x}(t)\|\le\|u-\omega\|+\|\omega-\dot{\bar x}(t)\|=\psi(t,z,\omega)+\|\omega-\dot{\bar x}(t)\|\to 0$ при $\psi(t,z,\omega)\to 0,\ \|\omega-\dot{\bar x}(t)\|\to 0$. Кроме того

$$\psi(t,(z,\omega)+\lambda(x_1,y_1)) \le \psi(t,(z,u)+\lambda(x_1,y_1)) + \|\omega-u\| = \psi(t,(z,u)+\lambda(x_1,y_1)) + \psi(t,(z,\omega)).$$

Поэтому

$$\nu\psi^{[1]}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t);(x,y)) \le \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{\substack{(z,u)\to(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))\\ u\in a(t,z),\ \lambda\downarrow 0}} \inf_{(x_1,y_1)\in(x,y)+\varepsilon B} \frac{\nu\psi(t,(z,u)+\lambda(x_1,y_1))}{\lambda} \le$$

$$\le \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{\substack{(z,u)\to(x(t),\dot{\bar{x}}(t))\\ u\in a(t,z),\ \lambda\downarrow 0}} \inf_{(x_1,y_1)\in(x,y)+\varepsilon B} \frac{\omega(t,(z,u)+\lambda(x_1,y_1))}{\lambda} = \omega^{[1]}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t);(x,y)),$$

т.е. $\nu\psi^{[1]}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t);(x,y)) \le \omega^{[1]}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t);(x,y))$ при $t\in[0,T]$. Отсюда следует, что $\nu\partial_C\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) \subset \partial_C\omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ при $t\in[0,T]$. Поэтому справедливость теоремы 2.2 вытекает из теоремы 2.1.

Известно, что $\partial_C\omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) = N_{gra_t}(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ при $t\in[0,T]$, где $N_{gra_t}(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ нормальный конус к $gr\,a_t$ в точке $(\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ в смысле Кларка (см.[7, с.54]) .

Пусть выполняется условие теоремы 2.1 и кроме того $a(t,x)$ выпуклое множество при всех (t,x). Используя теорему двойственности (см. [10], с.276) для задачи о кратчайшем расстоянии имеем

$$\psi(t,x,z) = \sup\{\langle y^*,z\rangle - \sup_{y\in a(t,x)}\langle y^*,y\rangle : \|y^*\|\le 1\}.$$

Положив $\omega^0(t,x,y^*) = \inf\{\langle y^*,y\rangle : y\in a(t,x)\}$ имеем, что

$$\nu\psi(t,x,z) = \sup\{\langle \nu y^*,z\rangle + \omega^0(t,x,-\nu y^*) : \|y^*\|\le 1\}$$

при $\nu \ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$. Пусть отображение $a(t,x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.4. Тогда $\|a(t,x)\| \le \|a(t,\bar{x}(t))\| + k(t)\|x-\bar{x}(t)\| \le \|a(t,\bar{x}(t))\| + \alpha k(t)$ при $x\in B(\bar{x}(t),\alpha)$, где $B(\bar{x}(t);\alpha) = \{x\in X : \|x-\bar{x}(t)\|\le\alpha\}$. Поэтому по лемме 2.3 имеем, что

$$\left|\omega^0(t,x,y^*) - \omega^0(t,x_0,y_0^*)\right| \le k(t)\|x-x_0\|\max(\|y_0^*\|,\|y^*\|) + (\|a(t,\bar{x}(t))\| +$$

$$+k(t)\alpha)\|y^*-y_0^*\| \le (\nu k(t) + \|a(t,\bar{x}(t))\| + \alpha k(t))(\|x-x_0\| + \|y^*-y_0^*\|)$$

при $y^*,y_0^*\in\nu B_*$, $x,x_0\in B(\bar{x}(t),\alpha)$, где $B_* = \{y^*\in X^* : \|y^*\|\le 1\}$. Отсюда следует, что отображение $x\to\omega^0(t,x,y^*)$ при $y^*\in B_*$ удовлетворяет условию Липшица в $B(\bar{x}(t),\alpha)$ с коэффициентом $k(t)$. Положим

$$\partial_x^0\omega^0(t,x(t),-\nu y^*) = \overline{co}\,\{\xi\in X^* : \exists y_i^*\in B_*,\ y_i^*\to y^*,\ \exists x_i\in X,\ x_i\to\bar{x}(t),$$

$$\exists\xi_i\in\partial_C^x\omega^0(t,x_i,-\nu y_i^*),\ \xi_i\to\xi\}.$$

Так как B_* является компактным и секвенциально компактным метрическим пространством индуцированной слабой со звездой топологией в X^* (см.[8, с.55]), то обозначив $\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) = \{y^*\in X^* : \|y^*\|\le 1,\ \psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) = \langle y^*,\dot{\bar{x}}(t)\rangle + \omega^0(t,\bar{x}(t),-y^*)\}$, по теореме 2.8.2 [7, с.83] получим

$$\nu\partial_C\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) \subset \{\int_{B_*}\partial_x^o\omega^0(t,\bar{x}(t),-\nu y^*),\nu y^*)\mu(dy^*) : \mu\in P[\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))]\},$$

где $P[\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))]$ множества вероятностных мер Радона, сосредоточенных на $\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$. Так как $\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))=0$, то $\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))=\{y^*\in B_*:\omega^0(t,\bar{x}(t),-y^*)=\left\langle -y^*,\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle\}$.

Из соотношения 1) теоремы 2.1 имеем

$$(\dot{x}^*(t),x^*(t))\in\partial_C(f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+\psi_0(t,\bar{x}(t)))+\{\int_{B_*}(\overset{o}{\partial}_x\omega^0(t,\bar{x}(t),-\nu y^*),\nu y^*)\mu(dy^*):\mu\in P[\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))]\}.$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. Пусть выполняется условие теоремы 2.1 и кроме того $a(t,x)$ выпуклое множество при всех (t,x). Тогда, если $\bar{x}(t)$ минимизирует (2.2) на множестве всех решений задачи (2.1), то существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что

1) $(\dot{x}^*(t),x^*(t))\in\partial_C(f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+\psi_0(t,\bar{x}(t)))+\{\int_{B_*}(\overset{o}{\partial}_x\omega^0(t,\bar{x}(t),-\nu y^*),\nu y^*)\mu(dy^*):\mu\in P[\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))]\}$,

2) $(x^*(0),-x^*(T))\in\partial_C(\varphi(\bar{x}(0),\bar{x}(T))+\nu q(\bar{x}(0)))$

при $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Из определения $\omega^0(t,\bar{x}(t),y^*)$ следует, что $y^*\to\omega^*(t,\bar{x}(t),y^*)$ вогнутая функция. Покажем, что множество $\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ выпукло. Пусть $y_1^*,y_2^*\in\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ и $\alpha_1\ge 0,\ \alpha_2\ge 0,\ \alpha_1+\alpha_2=1$. Тогда имеем

$$\left\langle -\alpha_1y_1^*-\alpha_2y_2^*,\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle=\alpha_1\omega^0(t,\bar{x}(t),-y_1^*)+\alpha_2\omega^0(t,\bar{x}(t),-y_2^*)\le\omega^0(t,\bar{x}(t),-\alpha_1y_1^*-\alpha_2y_2^*)\le\left\langle -\alpha_1y_1^*-\alpha_2y_2^*,\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle.$$

Отсюда вытекает, что

$$\omega^0(t,\bar{x}(t),-\alpha_1y_1^*-\alpha_2y_2^*)=\left\langle -\alpha_1y_1^*-\alpha_2y_2^*,\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle,\ \text{т.е.}\ \alpha_1y_1^*+\alpha_2y_2^*\in\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)).$$

Так как отображение $y^*\to\omega^*(t,\bar{x}(t),y^*)$ удовлетворяет условию Липшица, то множество $\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$ замкнуто. Если $f(t,x,y)=f(t,x)$, то по теореме 1.6.13 [8, с.169] имеем, что $x^*(t)\in\nu\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$. Поэтому $\omega^0(t,\bar{x}(t),-x^*(t))=\left\langle -x^*(t),\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle$.

Следствие 2.1. Пусть выполняется условие теоремы 2.1, $f(t,x,y)=f(t,x)$, $\varphi(x,y)=\varphi(y)$ и кроме того $a(t,x)$ выпуклое множество при всех (t,x). Тогда, если $\bar{x}(t)$ минимизирует (2.2) на множестве решений задачи (2.1), то существует функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ такая, что 1) $\dot{x}^*(t)\in\partial_C(f(t,\bar{x}(t))+\psi_0(t,\bar{x}(t)))+\{\int_{B_*}\overset{o}{\partial}_x\omega^0(t,\bar{x}(t),-\nu y^*))\mu(dy^*):\mu\in P[\Omega(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))]\}$,

2) $\omega^0(t,\bar{x}(t),-x^*(t))=\left\langle -x^*(t),\dot{\bar{x}}(t)\right\rangle$,

3) $x^*(0)\in\nu\partial_C q(\bar{x}(0))$,

4) $-x^*(T)\in\partial_C\varphi(\bar{x}(T))$, где $\nu\ge L(1+e^{m(T)}+m(T)e^{m(T)})$.

Отметим, что если $M\subset X$ замкнутое множество, $t\to \mathrm{gr}\,a_t$ измеримо на $[0,T]$, множество $\mathrm{gr}a_t$ замкнуто при $t\in[0,T]$, ***то*** положив $d(t,x,z)=\inf_{(u,\upsilon)\in \mathrm{gr}a_t}\|(u,\upsilon)-(x,z)\|$, $q(x)=\inf_{y\in M}\|y-x\|$ ограничение (2.1) можно написать в виде $q(x(0))+\int_0^T d(t,x(t),\dot{x}(t))dt=0$.

Поэтому если $\bar{x}(t)$ минимизирует функционал (2.2) на множестве всех решений задачи (2.1) и $f(t,x,y)$ и $\varphi(x_1,x_2)$ удовлетворяет условие леммы 2.4, то по теореме 6.1.1[7, с.210] (см.также теорему 10.47[11, с.221]) сушествуют одновременно не равные нулю числа

$\lambda_0 \ge 0$ и λ_1 такие, что $0 \in \partial_C \widetilde{L}(\bar{x}(\cdot), \lambda_0, \lambda_1)$, где $\widetilde{L}(x(\cdot), \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \varphi(x(0), x(T)) + \lambda_1 q(x(0)) + \int_0^T (\lambda_0 f(t, x(t), \dot{x}(t)) + \lambda_0 \psi_0(t, x(t)) + \lambda_1 d(t, x(t), \dot{x}(t)))dt$. (в теореме 6.1.1 надо положить $C = \{x(\cdot) \in W_1^1([0,T], X) : \|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\| \le \mu\}$, $0 < \mu < \alpha$ и $L(x(\cdot), \lambda_0, \lambda_1) = \widetilde{L}(x(\cdot), \lambda_0, \lambda_1) + kd_C(x(\cdot))$). Отсюда следует, что $\widetilde{L}^{[1]}((\bar{x}(\cdot), \lambda_0, \lambda_1); x(\cdot)) \ge 0$ при $x(\cdot) \in W_1^1([0,T], X)$. Поэтому анологична теореме 2.1 можно показать, что верно следующее замечание.

Замечание 2.1. Пусть $f(t,x,y)$ и $\varphi(x_1, x_2)$ удовлетворяет условие леммы 2.4, $M \subset X$ замкнутое множество, отображение $t \to gra_t$ измеримо на $[0,T]$, множество gra_t замкнуто при $t \in [0,T]$, $Q(t)$ непустое замкнутое множество, $t \to Q(t)$ измеримое отображение и $\bar{x}(t)$ среди всех решений задачи (2.1) минимизирует функционал (2.2). Тогда существуют функция $x^*(\cdot) \in W_1^1([0,T], X^*)$ и одновременно не равные нулю числа $\lambda_0 \ge 0$ и λ_1 такие, что 1) $(\dot{x}^*(t), x^*(t)) \in \partial_C(\lambda_0 f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) + \lambda_0 \psi_0(t, x(t)) + \lambda_1 d(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)))$ при $[0,T]$, 2) $(x^*(0), -x^*(T)) \in \partial_C(\lambda_0 \varphi(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) + \lambda_1 q(\bar{x}(0)))$.

Отметим, что $\lambda \partial_C d(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \subset N_{gra_t}(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$ при $\lambda \ge 0$.

3. Метод аппроксимации

Рассмотрим другую методику решения невыпуклых задач для дифференциальных включений.

Лемма 3.1. Если X банахово пространство, функция $\psi : X \to R_{+\infty}$ удовлетворяет локальному условию Липшица в δ окрестности точки x_0, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\alpha > 0$, где $\delta \ge \alpha > 0$, что

$$\varphi(x) = \psi(x_0) + \max_{p \in \partial_C \psi(x_0)} \langle p, x - x_0 \rangle + \varepsilon \|x - x_0\| + \delta_{B(x_0, \alpha)}(x)$$

является внутренней выпуклой аппроксимацией [6, с.60] для $\psi(x)$ в точке x_0, т.е. $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, $\varphi(x) \ge \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Лемма доказана в [6].

Пусть выполняется условие леммы 2.4. Тогда из леммы 2.4 следует, что $\bar{x}(\cdot)$ минимизирует функционал $\Phi_\nu(x(\cdot)) = \bar{\varphi}(x(0), x(T)) + \int_0^T \bar{f}(t, x(t), \dot{x}(t))dt$ на множестве $D = \left\{ x \in W_1^1([0,T], X) : \|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_1^1} < \frac{\alpha}{\beta} \right\}$ при $\nu \ge L(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})$, где $\bar{\varphi}(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) + \nu q(x_1)$, $\bar{f}(t,x,y) = f(t,x,y) + \psi_0(t,x) + \nu\psi(t,x,y)$. Применяя леммы 3.1 получим, что существует функция $\alpha(t) > 0$ и число $\alpha_0 > 0$ такие, что $\bar{x}(\cdot)$ минимизирует функционал

$$\Phi_\varepsilon(x(\cdot)) = \max_{p \in \partial_C \bar{\varphi}(\bar{x}(0), \bar{x}(T))} \langle p, (x(0) - \bar{x}(0), x(T) - \bar{x}(T)) \rangle + \int_0^T \Big(\max_{(p_1(t), p_2(t)) \in \partial_C \bar{f}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))} \langle (p_1(t), p_2(t)), (x(t) - \bar{x}(t), \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)) \rangle +$$
$$+ \varepsilon \|(x(t) - \bar{x}(t), \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t))\| \Big) dt + \varepsilon \|(x(0) - \bar{x}(0), x(T) - \bar{x}(T))\|$$

при $(x(0), x(T)) \in B((\bar{x}(0), \bar{x}(T)), \alpha_0)$, $(x(t), \dot{x}(t)) \in B((\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)), \alpha(t))$, где $\nu \ge L(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})$.

Предположим, что для $\varepsilon > 0$ существует число $\overline{\alpha}_\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha(t) \ge \overline{\alpha}_\varepsilon$ при $t \in [0,T]$. Отметим, что если для $\varepsilon > 0$ существует число $\overline{\alpha}_\varepsilon > 0$ такое, что $\partial_C \bar{f}(t,x,y) \subset \partial_C \bar{f}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) + \varepsilon(B_* \times B_*)$ при $(x,\ y) \in B((\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)),\overline{\alpha}_\varepsilon)$, то можно положить $\alpha(t) = \overline{\alpha}_\varepsilon$. Обозначив $z(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ имеем, что $\bar{z}(t) = 0$ минимизирует функционал

$$\Phi_\varepsilon(z(\cdot)) = \max_{p \in \partial_C \bar{\varphi}(\bar{x}(0),\bar{x}(T))} \langle p,(z(0),z(T)) \rangle + \int_0^T \Big(\max_{(p_1(t),p_2(t)) \in \partial_C \bar{f}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))} \langle (p_1(t),p_2(t)),(z(t),\dot{z}(t)) \rangle +$$
$$+ \varepsilon \|(z(t),\dot{z}(t))\| \Big) dt + \varepsilon \|(z(0),z(T))\|$$

при $(z(0),z(T)) \in B((0,0),\alpha_0)$, $(z(t),\dot{z}(t)) \in B((0,0),\overline{\alpha}_\varepsilon)$, где $\nu \ge L(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})$. Тогда получим, что $\bar{z}(t) = 0$ минимизирует функционал

$$\Phi_\varepsilon(z(\cdot)) = \max_{p \in \partial_C \bar{\varphi}(\bar{x}(0),\bar{x}(T))} \langle p,(z(0),z(T)) \rangle + \int_0^T \Big(\max_{(p_1(t),p_2(t)) \in \partial_C \bar{f}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))} \langle (p_1(t),p_2(t)),(z(t),\dot{z}(t)) \rangle +$$
$$+ \varepsilon \|(z(t),\dot{z}(t))\| \Big) dt + \varepsilon \|(z(0),z(T))\|$$

при $z(\cdot) \in W^1_\infty([0,T],\ X) = \{x(\cdot) \in C([0,T],X) : \dot{x}(\cdot) \in L_\infty([0,T],X)\}$, где $\nu \ge L(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})$.

Лемма 3.2. Пусть выполняется условие леммы 2.4 и для $\varepsilon > 0$ существует число $\overline{\alpha}_\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha(t) > \overline{\alpha}_\varepsilon$ при $t \in [0,T]$. Тогда $\bar{z}(t) = 0$ минимизирует функционал

$$\Phi_0(z(\cdot)) = \max_{p \in \partial_C \bar{\varphi}(\bar{x}(0),\bar{x}(T))} \langle p,(z(0),z(T)) \rangle + \int_0^T \Big(\max_{(p_{1(t)},p_2(t)) \in \partial_C \bar{f}(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))} \langle (p_1(t),p_2(t)),(z(t),\dot{z}(t)) \rangle$$

при $z(\cdot) \in W^1_\infty([0,T],\ X)$, где $\nu \ge L(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует $y(\cdot) \in W^1_\infty([0,T],\ X)$ такое, что $\Phi_0(y(\cdot)) < 0 = \Phi_0(0)$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ из определения $\Phi_\varepsilon(z(\cdot))$ следует, что $\Phi_\varepsilon(y(\cdot)) < 0$. По условию $\bar{z}(t) = 0$ минимизирует функционал $\Phi_\varepsilon(z(\cdot))$ в $W^1_\infty([0,T],\ X)$ и $\Phi_\varepsilon(\bar{z}) = 0$. Получим противоречие. Лемма доказана.

Так как $W^1_\infty([0,T],\ X)$ плотно в $W^1_1([0,T],\ X)$ и $\Phi_0(z(\cdot))$ непрерывная функция в $W^1_1([0,T],\ X)$, то имеем, что $\bar{z}(t) = 0$ минимизирует функционал $\Phi_0(z(\cdot))$ в $W^1_1([0,T],\ X)$, т.е. $\Phi_0(z(\cdot)) \ge \Phi_0(0) = 0$ при $z(\cdot) \in W^1_1([0,T],\ X)$. Поэтому из следствия 2.2[3] имеем, что верна следующая теорема.

Теорема 3.1. Если выполняется условие леммы 2.4 и для $\varepsilon > 0$ существует число $\overline{\alpha}_\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha(t) > \overline{\alpha}_\varepsilon$ при $t \in [0,T]$ и $\bar{x}(t)$ минимизирует функционал (2.2) на множестве всех решений задачи (2.1), то существует функция $x^*(\cdot) \in W^1_1([0,T],X^*)$ такая, что

1) $(\dot{x}^*(t),x^*(t)) \in \partial_C(f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) + \psi_0(t,\bar{x}(t)) + \nu\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)))$,

2) $(x^*(0),-x^*(T)) \in \partial_C(\varphi(\bar{x}(0),\bar{x}(T)) + \nu q(\bar{x}(0)))$, где $\nu \ge L(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})$.

Рассмотрим среди всех решений задачи

$$\dot{x}(t) \in a(t,x(t)), \quad x(0) \in M, \quad x(t) \in Q(t) \tag{3.1}$$

минимизации функционала

$$J(x)=\varphi(x(0),x(T))+\int_0^T f(t,x(t),\dot{x}(t))dt. \tag{3.2}$$

Пусть выполняется условие леммы 2.4. Положив $\psi(t,x,z)=\inf_{u\in a(t,x)}\|u-z\|$, $q(x)=\inf_{y\in M}\|y-x\|$, $\psi_0(t,x)=\inf_{\upsilon\in Q(t)}\|\upsilon-x\|$ ограничение (3.1) можно написать в виде $q(x(0))+\int_0^T(\psi(t,x(t),\dot{x}(t))+\psi_0(t,x(t)))dt=0$, где $x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$, $\|x(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|\le\alpha$. Пусть $\bar{x}(t)$ минимизирует функционал (3.2) на множестве всех решений задачи (3.1). Тогда если выполняется условие леммы 2.4 , то по теореме 6.1.1[7, с.210] (см.также теорему 10.47[11, с.221]) существуют одновременно не равные нулю числа $\lambda_0\ge 0$ и λ_1 такие, что $0\in\partial_C L(\bar{x}(\cdot),\lambda_0,\lambda_1)$ (в теореме 6.1.1 надо положить $C=\{x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X):\|x(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|\le\mu\}$, $0<\mu<\alpha$) , где

$$L(x(\cdot),\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0\varphi(x(0),x(T))+\lambda_1 q(x(0))+\int_0^T(\lambda_0 f(t,x(t),\dot{x}(t))+\lambda_1\psi(t,x(t),\dot{x}(t))+\lambda_1\psi_0(t,x(t)))dt.$$

Отсюда следует, что $L^{[1]}((\bar{x}(\cdot),\lambda_0,\lambda_1);x(\cdot))\ge 0$ при $x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$. Поэтому анологична теореме 2.1 можно показать, что верна следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть удовлетворяется условие леммы 2.4 и $\bar{x}(t)$ среди всех решений задачи (3.1) минимизирует функционал (3.2). Тогда существуют функция $x^*(\cdot)\in W_1^1([0,T],X^*)$ и одновременно не равные нулю числа $\lambda_0\ge 0$ и λ_1 такие, что

1) $(\dot{x}^*(t),x^*(t))\in\partial_C(\lambda_0 f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+\lambda_1\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+\lambda_1\psi_0(t,x(t)))$,

2) $(x^*(0),-x^*(T))\in\partial_C(\lambda_0\varphi(\bar{x}(0),\,\bar{x}(T))+\lambda_1 q(\bar{x}(0)))$.

Отметим, что замечание 2.1 и теорема 3.2 информативны лишь, когда $\lambda_0\ne 0$.

4. Необходимое условие высшего порядка в экстремальной задаче для включений

Пусть X сеперабельное банахово пространство, $a:[0,T]\times X\to \mathrm{comp}\,X$, где $T>0$, $f:[0,T]\times X\to(-\infty,+\infty]$ -нормальный интегрант, $\varphi:X\to(-\infty,+\infty]$ -функция, $M\subset X$ замкнутое множество. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in a(t,x(t)) \tag{4.1}$$

Решением включения (4.1) называется абсолютно непрерывное отображение $x:[0,T]\to X$ удовлетворяющее включению (4.1) для почти всех $t\in[0,T]$. Решение $\bar{x}(t)$ включения (4.1), удовлетворяющее условию

$$x(0)\in M\subset X \tag{4.2}$$

и минимизирующее функционал

$$J(x)=\varphi(x(T))+\int_0^T f(t,x(t))dt \tag{4.3}$$

среди всех решений задачи (4.1), (4.2) назовем оптимальным. В дальнейшем будем предполагать, что $|J(\bar{x})|<+\infty$.

Положим $\psi(s,x,y)=\inf\{\|z-y\|:z\in a(s,x)\}$, $q(x)=\inf_{y\in M}\|y-x\|$.

Рассмотрим минимизацию функционала

$$J_r(x)=\varphi(x(T))+\int_0^T f(t,x(t))dt+r((q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt)^{\beta}+\|x(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|_C^{\beta-\nu}(q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt)^{\nu})$$

среди всех функции $x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$, где $\beta\ge\nu>0$. Решение задачи (4.1)-(4.3) обозначим через $\bar{x}(t)$.

Теорема 4.1. Пусть $a:[0,T]\times X\to \mathrm{comp}X$ многозначное отображение, $M\subset X$ компактное множество, $a(t,x)$ измеримо по t, $f:[0,T]\times X\to(-\infty,+\infty]$ -нормальный интегрант, $\varphi:X\to(-\infty,+\infty]$ -функция, существует суммируемая функция $k(t)>0$ такая, что $\rho_X(a(t,x),a(t,y))\le k(t)\|x-y\|$ при $x,y\in X$, существуют суммируемая функция $k_1(t)>0$ и число $k_2>0$ такие, что

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\le k_1(t)\|x_1-x_2\|^{\nu}(\|x_2-\overline{x}(t)\|^{\beta-\nu}+\|x_1-x_2\|^{\beta-\nu})$$

при $x_1,x_2\in X$,

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le k_2\|x-y\|^{\nu}(\|y-\overline{x}(T)\|^{\beta-\nu}+\|x-y\|^{\beta-\nu})$$

при $x,y\in X$, где $\beta\ge\nu>0$. Тогда если $\overline{x}(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ является решением задачи (4.1)-(4.3), то существует число $r_0>0$ такое, что $\overline{x}(t)$ минимизирует функционал $J_r(x)$ в пространстве $W_1^1([0,T],X)$ при $r\ge r_0$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{x}(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$. Положим $\delta=q(\widetilde{x}(0))$, $\rho(t)=\psi(t,\widetilde{x}(t),\dot{\widetilde{x}}(t))$.

Пусть $x_0\in M$ такой, что $q(\widetilde{x}(0))=\|\widetilde{x}(0)-x_0\|$. По лемме 2.1 существует такое решение $x_0(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ задачи $\dot{x}(t)\in a(t,x(t))$, $x(0)=x_0$, что $\|x_0(t)-\widetilde{x}(t)\|\le\delta e^{m(t)}+\int_0^t e^{m(t)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau,$

где $m(t)=\int_0^t k(s)ds$. Тогда имеем, что

$$|J(x_0)-J(\widetilde{x})|\le|\varphi(x_0(T))-\varphi(\widetilde{x}(T))|+\left|\int_0^T f(t,x_0(t))dt-\int_0^T f(t,\widetilde{x}(t))dt\right|\le$$

$$\le k_2\|x_0(T)-\widetilde{x}(T)\|^{\nu}(\|\widetilde{x}(T)-\overline{x}(T)\|^{\beta-\nu}+\|x_0(T)-\widetilde{x}(T)\|^{\beta-\nu})+$$
$$+\int_0^T k_1(t)\|x_0(t)-\widetilde{x}(t)\|^{\nu}(\|\widetilde{x}(t)-\overline{x}(t)\|^{\beta-\nu}+\|x_0(t)-\widetilde{x}(t)\|^{\beta-\nu})dt\le$$
$$\le k_2(\delta e^{m(T)}+\int_0^T e^{m(T)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau)^{\nu}(\|\widetilde{x}(T)-\overline{x}(T)\|^{\beta-\nu}+(\delta e^{m(T)}+\int_0^T e^{m(T)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau)^{\beta-\nu})+$$
$$+\int_0^T k_1(t)(\delta e^{m(t)}+\int_0^t e^{m(t)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau)^{\nu}(\|\widetilde{x}(t)-\overline{x}(t)\|^{\beta-\nu}+(\delta e^{m(t)}+\int_0^t e^{m(t)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau)^{\beta-\nu})dt\le$$
$$\le k_2(\delta e^{m(T)}+\int_0^T e^{m(T)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau)^{\nu}(\|\widetilde{x}(T)-\overline{x}(T)\|^{\beta-\nu}+(\delta e^{m(T)}+\int_0^T e^{m(T)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau)^{\beta-\nu})+$$
$$+\int_0^T k_1(t)dt(\delta e^{m(T)}+\int_0^T e^{m(T)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau)^{\nu}(\|\widetilde{x}(\cdot)-\overline{x}(\cdot)\|_C^{\beta-\nu}+(\delta e^{m(T)}+\int_0^T e^{m(T)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau)^{\beta-\nu})\le$$
$$\le(k_2+\int_0^T k_1(t)dt)(\delta e^{m(T)}+\int_0^T e^{m(T)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau)^{\nu}(\|\widetilde{x}(\cdot)-\overline{x}(\cdot)\|_C^{\beta-\nu}+(\delta e^{m(T)}+\int_0^T e^{m(T)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau)^{\beta-\nu})\le$$
$$\le(k_2+\int_0^T k_1(t)dt)e^{\beta m(T)}[(\delta+\int_0^T\rho(t)dt)^{\beta}+\|\widetilde{x}(\cdot)-\overline{x}(\cdot)\|_C^{\beta-\nu}(\delta+\int_0^T\rho(t)dt)^{\nu}].$$

Получим, что

$|J(x_0)-J(\widetilde{x})|\le r_0[(\delta+\int_0^T\rho(t)dt)^{\beta}+\|\widetilde{x}(\cdot)-\overline{x}(\cdot)\|_C^{\beta-\nu}(\delta+\int_0^T\rho(t)dt)^{\nu}]$, где $r_0=(k_2+\int_0^T k_1(t)dt)e^{\beta m(T)}$.

Положив $E(x)=(q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt)^{\beta}+\|x(\cdot)-\overline{x}(\cdot)\|_C^{\beta-\nu}(q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt)^{\nu}$ и $r_0=(k_2+\int_0^T k_1(t)dt)e^{\beta m(T)}$ имеем, что $|J(x_0)-J(\widetilde{x})|\le r_0E(\widetilde{x})$. Покажем, что $\overline{x}(t)$ минимизирует также функционал $J_r(x)$ в пространстве $W_1^1([0,T],X)$ при $r\ge r_0$. Предположим противное.

Пусть существует функция $\upsilon(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ такая, что $J_r(\upsilon)<J(\overline{x})$. Так как для $\upsilon(\cdot)$ существует решение $\upsilon_0(\cdot)$ задачи (4.1),(4.2) такое, что $|J(\upsilon_0)-J(\upsilon)|\le rE(\upsilon)$ при $r\ge r_0$, то $J(\upsilon_0)\le J(\upsilon)+rE(\upsilon)=J_r(\upsilon)<J(\overline{x})$. Получим противоречие. Полученное противоречие означает, что $\overline{x}(t)$ минимизирует также функционал $J_r(x)$ в пространстве $W_1^1([0,T],X)$ при $r\ge r_0$. Теорема доказана. Положим $J_r^{\{\beta\}+}(\overline{x};x)=\overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda^\beta}(J_r(\overline{x}+\lambda x)-J_r(\overline{x}))$, $J_r^{\{\beta\}-}(\overline{x};x)=\underline{\lim}_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^\beta}(J_r(\overline{x}+\lambda x)-J_r(\overline{x}))$ при $x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$.

Следствие 4.1. Если выполняются условия теоремы 4.1, то существует число $r_0>0$ такое, что $J_r^{\{\beta\}+}(\overline{x};x)\ge J_r^{\{\beta\}-}(\overline{x};x)\ge 0$ при $r\ge r_0$ и $x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$.

Обозначим

$$P_r(x)=\varphi^{\{\beta\}+}(\overline{x}(T);x(T))+\int_0^T f^{\{\beta\}+}(t,\overline{x}(t);x(t))dt+r((q^{\{1\}+}(\overline{x}(0);x(0))+$$

$$+\int_0^T\psi^{\{1\}+}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t);x(t),\dot{x}(t))dt)^\beta+\|x(\cdot)\|_c^{\beta-\nu}(q^{\{1\}+}(\overline{x}(0);x(0))+\int_0^T\psi^{\{1\}+}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t);x(t),\dot{x}(t))dt)^\nu).$$

Теорема 4.2. Если выполняются условия теоремы 4.1, то существует число $r_0>0$ такое, что $P_r(x)\ge 0$ при $r\ge r_0$ и $x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$.

Доказательство. Если существует функция $k(t)>0$ такая, что $\rho_X(a(t,x_1),a(t,x_2))\le k(t)\|x_1-x_2\|$ при $x_1,x_2\in X$, то по лемме 2.2 имеем

$$|\psi(t,x_1,y_1)-\psi(t,x_2,y_2)|\le k(t)\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|$$

при $x_1,y_1,x_2,y_2\in X$. Известно, что если $g(x)\ge 0,\ \alpha>0$ и $\limsup_{x\to x_0}g(x)<+\infty$, то $\limsup_{x\to x_0}(g(x))^\alpha=(\limsup_{x\to x_0}g(x))^\alpha$. Поэтому если выполняется условие теоремы 4.1, то имеем, что $f(t,\overline{x}(t)+\lambda x)-f(t,\overline{x}(t))\le k_1(t)\lambda^\beta\|x\|^\beta$ и $\psi(t,\overline{x}(t)+\lambda x,\dot{\overline{x}}(t)+\lambda y)-\psi(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))\le k(t)\lambda\|x\|+\lambda\|y\|$, при $x,y\in X$. Поэтому применяя лемму Фату 2.4.6 [9] имеем, что $0\le J_r^{\{\beta\}+}(\overline{x};x)\le P_r(x)$. Теорема доказана.

Следствие 4.2. Если выполняются условия теоремы 4.1, то $\varphi^{\{\beta\}+}(\overline{x}(T);x(T))+\int_0^T f^{\{\beta\}+}(t,\overline{x}(t);x(t))dt\ge 0$

при $x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ и $\psi^{\{1\}+}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t);(x(t),\dot{x}(t)))=0$, $q^{\{1\}+}(\overline{x}(0);x(0)=0$.

Так как $\|x(\cdot)-\overline{x}(\cdot)\|_{C([0,T],X)}\le\|x(\cdot)-\overline{x}(\cdot)\|_{W_1^1}$, то имеем, что $\overline{x}(t)$ минимизирует также функционал

$$\overline{J}_r(x)=\varphi(x(T))+\int_0^T f(t,x(t))dt+r((q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt)^\beta+\|x(\cdot)-\overline{x}(\cdot)\|_{W_1^1}^{\beta-\nu}(q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt)^\nu)$$

в пространстве $W_1^1([0,T],X)$ при $r\ge r_0$.

Пусть $g:[0,T]\times X\to(-\infty,+\infty]$ -нормальный интегрант, $e:X\to(-\infty,+\infty]$ функция. Положим

$$S(x)=e(x(T))+\int_0^T g(t,x(t))dt,$$

$$E(x)=(q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt)^\beta+\|x(\cdot)-\overline{x}(\cdot)\|_C^{\beta-\nu}(q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt)^\nu,$$

$$H_r(x)=J(x)-S(x)+r((q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot x(t))dt)^{\beta}+\|\bar x(\cdot)-x(\cdot)\|_C^{\beta-\nu}(q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot x(t))dt)^{\nu})=$$
$$=\varphi(x(T))-e(x(T))+\int_0^T f(t,x(t))dt-\int_0^T g(t,x(t))dt+$$
$$+r((q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot x(t))dt)^{\beta}+\|x(\cdot)-\bar x(\cdot)\|_C^{\beta-\nu}(q(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot x(t))dt)^{\nu}).$$

Пусть $\upsilon(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$. Положим $\delta=q(\upsilon(0))$, $\rho(t)=\psi(t,\upsilon(t),\dot\upsilon(t))$. По лемме 2.1 существует такое решение $w_\upsilon(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ задачи $\dot x(t)\in a(t,x(t))$, $x(0)=x_0$, что
$$\|\upsilon(t)-w_\upsilon(t)\|\le\delta e^{m(t)}+\int_0^t e^{m(t)-m(\tau)}\rho(\tau)d\tau,$$
где $m(t)=\int_0^t k(s)ds$, точка $x_0\in M$ такая, что $q(\upsilon(0))=\|\upsilon(0)-x_0\|$. Множество таких $w_\upsilon(\cdot)$ обозначим через $D(\upsilon)$.

Теорема 4.3. Пусть $a:[0,T]\times X\to \mathrm{comp}\,X$ многозначное отображение, $a(t,x)$ измеримо по t, $M\subset X$ компактное множество, $f:[0,T]\times X\to(-\infty,+\infty]$ -нормальный интегрант, $\varphi:X\to(-\infty,+\infty]$ -функция и существует суммируемая функция $k(t)>0$ такая, что $\rho_X(a(t,x),a(t,y))\le k(t)\|x-y\|$ при $x,y\in X$, $\bar x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ решение задачи (4.1)-(4.3), существуют нормальный интегрант $g:[0,T]\times X\to(-\infty,+\infty]$, функция $e:X\to(-\infty,+\infty]$, суммируемая функция $k_1(t)>0$ и число $k_2>0$ такие , что
$$|f(t,x_1)-g(t,x_1)-f(t,x_2)+g(t,x_2)|\le k_1(t)\|x_1-x_2\|^{\nu}(\|x_2-\bar x(t)\|^{\beta-\nu}+\|x_1-x_2\|^{\beta-\nu})\quad\text{при}$$
$x_1,x_2\in X$, $|\varphi(x)-e(x)-\varphi(y)+e(y)|\le k_2\|x-y\|^{\nu}(\|y-\bar x(T)\|^{\beta-\nu}+\|x-y\|^{\beta-\nu})$ при $x,y\in X$.

Тогда существует число $r_0>0$ такое, что $\bar x(t)$ минимизирует функционал $H_r(u)$ в множестве $\{\upsilon\in W_1^1([0,T],X):\exists w_\upsilon\in D(\upsilon),\text{что } S(w_\upsilon)\le S(\bar x)\}$ при $r\ge r_0$.

Доказательство. Пусть $\tilde x(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$. Положим $\delta=q(\tilde x(0))$, $\rho(t)=\psi(t,\tilde x(t),\dot{\tilde x}(t))$.

Пусть $x_0\in M$ такой, что $q(\tilde x(0))=\|\tilde x(0)-x_0\|$. Аналогично доказательству теоремы 4.1,

существуют число $r_0>0$ и решение $w(\cdot)\in W_1^1([0,T],X)$ задачи $\dot x(t)\in a(t,x(t))$, $x(0)=x_0$ такие, что
$$|J(\tilde x)-S(\tilde x)-J(w)+S(w)|\le r_0[(\delta+\int_0^T\rho(t)dt)^{\beta}+\|\tilde x(\cdot)-\bar x(\cdot)\|_C^{\beta-\nu}(\delta+\int_0^T\rho(t)dt)^{\nu}],$$
где $r_0=(k_2+\int_0^T k_1(t)dt)e^{\beta m(T)}$.

Покажем, что $\bar x(t)$ минимизирует также функционал $H_r(u)$ в множестве $\{\upsilon\in W_1^1([0,T],X):\exists w_\upsilon\in D(\upsilon),\text{что } S(w_\upsilon)\le S(\bar x)\}$ при $r\ge r_0$. Предположим противное. Пусть существует функция $u\in\{\upsilon\in W_1^1([0,T],X):\exists w_\upsilon\in D(\upsilon),\text{что } S(w_\upsilon)\le S(\bar x)\}$ такая, что $H_r(u)<H_r(\bar x)=J(\bar x)-S(\bar x)$. Ясно, что $|J(w_u)-S(w_u)-J(u)+S(u)|\le rE(u)$ при $r\ge r_0$, то
$$J(w_u)-S(w_u)=H_r(w_u)\le H_r(u)=J(u)-S(u)+rE(u)<J(\bar x)-S(\bar x).$$

Так как $S(w_u)\le S(\bar x)$, то отсюда вытекает, что $J(w_u)<J(\bar x)$. Получим противоречие. Полученное противоречие означает, что $\bar x(t)$ минимизирует также функционал $H_r(x)$ в $x\in\{\upsilon\in W_1^1([0,T],X):S(w_\upsilon)\le S(\bar x)\}$ при $r\ge r_0$. Теорема доказана.

Замечание 4.1. Используя из леммы 5.4.1[2] аналогично можно получить локальные варианты теоремы 4.1 и 4.2.

Если X сеперабельное банахово пространство, то интеграл понимается в смысле Бохнера. Используя другое определение интеграла векторных функций (см.[12, с.89]), полученные результаты можно обобщить и в том случае, когда X пространство Фреше.

Список литературы / References

1. *Садыгов М.А.* Исследование негладких оптимизационных задач. Баку: Элм, 2002. 125 с.
2. *Садыгов М.А.* Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 359 p.
3. *Садыгов М.А*. Об обобщенной задаче Больца. // International Scientfic Review, 2020 (в печати).
4. *Садыгов М.А.* О необходимых и достаточных условиях минимума для дифференциальных включений. // International Scientfic Review, 2020 (в печати). С. 24-41.
5. *Садыгов М.А.* Свойства оптимальных траекторий дифференциальных включений. Канд. диссертация. Баку, 1983. 116с.
6. *Садыгов М.А.* Экстремальные задачи для негладких систем. Баку: Изд-во Азерб. тех-кого ун-та, 1996. 148 с.
7. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
8. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
9. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 760 с.
10. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука,1979. 429 с.
11. *Бурбаки Н.* Интегрирование. М.:Наука, 1970. 320 с.

USE OF FOAM SYSTEMS IN THE DRILLING OF OIL AND GAS WELLS UNDER CONDITIONS OF ABNORMALLY LOW RESERVOIR PRESSURES

Deryayev A.R.[1], Amanov M.A.[2], Deryayev S.A.[3] (Turkmenistan)
Email: Deryayev573@scientifictext.ru

[1]Deryayev Annaguli Rejepovich – Candidate of Technical Science, doctoral Student;
[2]Amanov Mergen Annamuradovich – Senior Lecturer;
[3]Deryayev Suleyman Annaguliyevich – Student,
DEPARTMENT OF OIL AND GAS WELL DRILLING,
INTERNATIONAL OIL AND GAS UNIVERSITY,
ASHGABAT, TURKMENISTAN

Abstract: *improving the technical and economic efficiency of drilling of oil and gas wells is associated with usage of the most profitable types of drilling fluids. One of the main requirements for drilling fluids is increasing the drilling speed by economical use (expenditure) of chemicals and materials used for the preparation and processing of drilling fluids. Also, drilling fluids should not adversely affect the formation productivity. To eliminate the negative phenomena in the oil and gas deposits caused by both surface phenomena in natural conditions and due to the ingress of various media into the reservoir from the outside, complex reagent complexes have been created. One of the promising areas for solving this problem is usage of foam systems. Many years of pilot work carried out in oil and gas fields at abnormally low reservoir pressures proved high efficiency of foam systems.*

Keywords: *foam systems, abnormally low reservoir pressures, oil, drilling, absorption, drilling mud.*

ПРИМЕНЕНИЕ ПЕННЫХ СИСТЕМ В БУРЕНИИ НЕФТЯНЫХ И ГАЗОВЫХ СКВАЖИН В УСЛОВИЯХ АНОМАЛЬНО НИЗКИХ ПЛАСТОВЫХ ДАВЛЕНИЙ

Деряев А.Р.[1], Аманов М.А.[2], Деряев С.А.[3] (Туркменистан)

[1]Деряев Аннагулы Реджепович – кандидат технических наук, докторант;
[2]Аманов Мерген Аннамурадович – старший преподаватель, соискатель;
[3]Деряев Сулейман Аннагулыевич – студент,
кафедра бурения нефтяных и газовых скважин,
Международный университет нефти и газа,
г. Ашхабад, Туркменистан

Аннотация: *повышение технико-экономической эффективности бурения нефтяных и газовых скважин связано с использованием наиболее выгодных видов буровых растворов. Одним из основных требований, предъявляемых к буровым растворам, является повышение скорости бурения путем экономичного использования (расходования) химических реагентов и материалов, используемых для приготовления и обработки буровых растворов. Также буровые растворы не должны отрицательно воздействовать на продуктивность пласта. Для устранения отрицательных явлений в нефтяной и газовой залежи, вызываемых как поверхностными явлениями в природных условиях, так и вследствие попадания в пласт извне различных сред, созданы сложные реагентные комплексы. К одному из перспективных направлений для решения указанной задачи относится применение пенных систем. Многолетние опытно-промышленные работы, проведенные на нефтяных и газовых*

месторождениях при аномально низких пластовых давлениях, доказали высокую эффективность пенных систем.
Ключевые слова: *пенные системы, аномально низкие пластовые давления, нефть, бурение, поглощение, буровой раствор.*

Currently, one of the main problems in the world arising from drilling and development of wells is the absorption of drilling and cement fluids into formations. Huge amount of means and time is being spent on combating takeover. While solutions are absorbed during the drilling and operation of wells in production, a large number of complications arise. More precisely, a large number of chemicals and time are spent. Development of effective measures to prevent and control the likelihood of absorption will reduce the cost of developing fields, and will also increase the technical and economic efficiency of drilling of oil and gas wells. To solve these problems, it will be advisable to use foam solutions.

Low density of foams provides a significant reduction in hydrostatic pressure in the well, which creates favorable conditions for both effective destruction of rocks and for the qualitative development of hydrocarbon horizons. In addition, the flow of drill cuttings and other clogging materials into the reservoir is sharply reduced, which helps to preserve the filtration properties of reservoir. The above properties of foams can significantly reduce their absorption (filtration flow) until its complete elimination. This is also facilitated by certain colmatizing properties of foams due to the formation of adsorption films on the walls of the wells, as well as in pores and cracks, which prevent direct contact of the liquid with the rock.

Cleaning the bottom of the cuttings and bringing it to the surface is one of the functions performed by the flushing fluid in the process of opening the layer. As is known, clay solutions, aerated solutions, foams, hydrocarbon-based solutions and gaseous agents are used as washing liquids.

According to field data, as the density of the washing liquid decreases, the penetration rate increases. Speed of penetration also depends on degree of cleaning of the face from the cuttings. In turn, the cleanliness of face depends on both the fluid flow rate and its physicochemical properties.

Foam systems differ from other types of washing liquids in their physical and physicochemical properties, due to which they can change the density (0.2-0.9 g / cm^3) in a larger range and have a high destructive ability [1].

In the process of drilling, forced stops often occur. In order to keep suspended rock particles in the annular space in suspension, the flushing fluid must have a holding capacity, i.e. thixotropic properties, for increasing in steady state over time, the ultimate shear stress. Unlike water and clay solution, the foam will keep particles of the cuttings in suspension for a long time due to structural and mechanical properties and phenomenon of fluidization. In this regard, the foam is far superior to all flushing liquids used.

Opening of reservoir by perforation is one of the most important processes in the system of measures for completion of wells. Foam solutions injected into the lower part of the well before perforation work include:

- Preservation of the natural permeability of reservoir;
- Prevention of deformation of the cement ring and production casing;
- Long-term existence of foam system in the column without changing its properties;
- Preventing mixing of the liquid located in the upper part of the column with foam.

Being a viscos-plastic elastic system, foam weakens the effects of shock waves generated during the shooting of perforators. This, in turn, can contribute more to maintaining the integrity of casing and cement ring.

Foam cement solution is a three-phase foam. In presence of cement particles, stability of the foam, as well as the strength of its bubbles, increases dramatically; stability of the foam increases with increase in adhesion strength of cement particles to air bubbles. The advantage of foam cement solution in comparison with conventional cement mortar is that the foam coverage area is significantly increased due to clogging properties, low density and elasticity of the system.

As the oil and gas field practice has shown, with the use of foam systems, oil and gas production can be intensified both by acting on formation and on the bottom-hole zone. The bottom hole formation zone is affected by chemical and physicochemical methods. In chemical methods, foam acid and foam clay treatments are used. In the first case, hydrochloric acid solutions are used, in the second - a mixture of hydrochloric and hydrofluoric acids [2].

In physicochemical methods, multicomponent foam is used. The advantage of the foam treatment is as follows:

- Due to its low density and high multiplicity, the foam acid covers a significantly greater thickness of layer;
- Due to high penetrating ability of the foam and the slower action of acid on the rock, it is possible to transport active acid deep into the formation over long distances, thereby exposing deep zones of the layer;
- Presence of a gas phase promotes better removal of reaction products from the bottom hole layer zone.

Long-term field tests indicate the possibility of intensifying oil production using foam systems in fields that have entered the late stage of development, characterized by low oil production rates and a high degree of water cut. The injection of a multicomponent system into the bottom hole formation zone gives positive results under the following conditions:

- Uncovered thickness of productive layers in the well is characterized by high heterogeneity in permeability - along with high permeability there are low permeability layers that are not developed during well operation;
- Low-permeability layers contain oil reserves that are not produced;
- Well is located in the zone of active exposure to water injected into injection wells;
- Water cut of well production is 95-99% and is characterized by high productivity.

Thus, our specialists set a goal, using local raw materials, to create an effective, affordable, cost-effective and environmentally friendly component composition that can be used to prepare a low-density drilling fluid, ensuring trouble-free wiring and completion of wells, in particular, when opening depleted wells horizons characterized by abnormally low reservoir pressure.

References / Список литературы

1. *Mammedov B., Amanov M.* Application of lightweight process fluids in well killing and workover operations. // “Education and sports in the prosperous epoch of powerful state”. Articles of the International Scientific Conference, IV section. Ashgabat: Ylym, 2019. 348 p.
2. *Mammedov B., Amanov M.* Application of foam systems in drilling oil and gas wells in the conditions of abnormally low formation // “Education and sports in the prosperous epoch of powerful state”. Articles of the International Scientific Conference, IV section. Ashgabat: Ylym, 2019. 350 p.

SAFE MANAGEMENT OF TOXIC WASTE OF PRODUCTIONS OF FLUORIC ALUMINIUM

Gumbatov M.O.[1], Akhmedova A.H.[2], Gafarov E.K.[3] (Republic of Azerbaijan)
Email: Gumbatov573@scientifictext.ru

[1]Gumbatov Magomed Orudzh ogly - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor;
[2]Akhmedova Ayten Hamlet gyzy - Doctor of Philosophy in Technical Sciences, Senior Lecturer;
[3]Gafarov Emil Kail ogly - Doctor of Philosophy in Technical Sciences, Senior Lecturer,
DEPARTMENT EXTRAORDINARY SITUATIONS AND HEALTH AND SAFETY,
CONSTRUCTION AND TECHNOLOGICAL FACULTY,
AZERBAIJAN UNIVERSITY OF ARCHITECTURE AND CIVIL ENGINEERING,
BAKU, REPUBLIC OF AZERBAIJAN

Abstract: *fluorine and its connections has great industrial value. When processing fluorinated substances it is formed various connections which is toxic and poisonous. One of such productions is fluoric aluminum. When receiving fluoric aluminum waste fluoric hydrogen is formed and kremneftorit which constitutes danger to the environment.*
In given to article possibilities of processing utilization of fluorinated production wastes of fluoric aluminum are dangerous thatt safe management of toxic and poisonous waste of the industry.
Keywords: *toxic waste, fluoric connections, safety, managements, environments.*

БЕЗОПАСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТОКСИЧНЫМИ ОТХОДАМИ ПРОИЗВОДСТВА ФТОРИСТОГО АЛЮМИНИЯ

Гумбатов М.О.[1], Ахмедова А.Г.[2], Гафаров Э.К.[3]
(Азербайджанская Республика)

[1]Гумбатов Магомед Орудж оглы - кандидат технических наук, доцент;
[2]Ахмедова Айтен Гамлет гызы - доктор философии по техническим наукам, старший преподаватель;
[3]Гафаров Эмиль Каил оглы - доктор философии по техническим наукам, старший преподаватель,
кафедра чрезвычайных ситуаций и безопасности жизнедеятельности,
строительно-технологический факультет,
Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
г. Баку, Азербайджанская Республика

Аннотация: *фтор и его соединения имеют большое промышленное значение. При переработке фторсодержащих веществ образуются различные соединения, которые являются токсичными и ядовитыми. Одним из таких производств является производство фтористого алюминия. При получении фтористого алюминия образуются отходы - фтористый водород и кремнефторид, которые представляют опасность для окружающей среды.*
В данной статье описаны возможности переработки-утилизации фторсодержащих отходов производства фтористого алюминия, что делает возможным безопасное управление токсичными и ядовитыми отходами промышленности.
Ключевые слова: *токсичные отходы, фтористые соединения, безопасность, управления, окружающей среды.*

УДК 661.482:631.812

ВВЕДЕНИЕ

Фтор и его соединения имеют большое значение и без него немыслимо существование производства редких и цветных металлов, а также химической промышленности [1]. При переработке фторапатита образуется газообразный фтористый водород и фторид кремния.

Поскольку эти соединения могут навредить окружающий среды, их подвергают процессу абсорбции и при этом получают кремнефтористоводородную кислоту - H_2SiF_6 [2].

ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью данной работы является изучение возможности переработки токсичных отходов производства фтористого алюминия на другой продукт, имеющий промышленное значение, и тем самым обеспечить безопасное управление токсичными и ядовитыми фторсодержащими веществами.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Кремнефтористоговодородная кислота очень агрессивна, многие металлы подвергает усиленной коррозии. Поэтому ее производство и перевозки весьма затрудняются. Кремнефтористоводородная кислота, как фтор и его другие соединения, токсична, ядовита и переработка ее имеет большое значение. В некоторых случаях эту кислоту перерабатывают на фтористый алюминий [3].

Реакция протекает в две стадии: на первой происходит образование кремнефтористого алюминия:

$3H_2SiF_6 + 2Al\,(OH_3) = Al_2(SiF_6)_3 + 6H_2O$

А на второй реакция сопровождается получением диоксида кремния и фтористоводородной кислоты:

$Al_2(SiF_6)_3 + 6H_2O = 2\ AlF_3 + 3SiO_2 + 12\ HF$

Одновременно образовавшаяся фтористоводородная кислота тоже взаимодействует с избыточными гидроокисями алюминия:

$12HF + 4Al(OH)_3 = 4AlF_3 + 12H_2O$

Итоговая реакция выражается уравнением:

$H_2SiF_6 + 2Al(OH)_2 = 2\ AlF_3 + SiO_2$(гидр.) $+ 4H_2O$

После фильтрации раствора алюминия из реакционной массы кремнегель с влажностью 50-80% и сточные воды (содержащие до 3% H_2SiF_6 остаточная кислотность) нейтрализуется и выбрасывается в специальной шламонакопитель.

Такой подход не может быть рациональным, так как с одной стороны теряются дорогостоящие кремнефтористые соединения, с другой стороны значительный вред наносится окружающей среде.

Ранее нами был предложен способ [4, 5] использования кремнийсодержащего отхода производства фтористого алюминия в антикоррозийных работах. Однако данное исследования предполагало использование кремнегеля только в антикоррозийных работах при производстве серной кислоты.

В связи с этим объем использования кремнегеля ограничен и составляет не более 25% от его общего количества. Кроме того, в работе [4] было предусмотрено использование только кремнегеля, а сточные воды, содержащие кремнефтористую водородную кислоту, подвергали процессу нейтрализации известковым молоком с последующим выбросом в шламонакопитель.

В данном исследовании сделана попытка одновременно утилизировать как кремнегель, так и остаточную кремнефтористоводородную кислоту. Для достижения поставленной цели было предложено и проверено в промышленных условиях получение высушенного технического кремнегеля и кремнефтористого водорода.

После фильтрации основного раствора фтористого алюминия кремнегель со смесью остаточной кремнефтористоводородной кислоты и водой поступает в сборник, снабженный мешалкой, где промывается горячей водой (60-80^{0}C). После промывки полученную суспензию фильтруют, кремнегель направляют в процесс сушки, фильтрат поступает в реактор емкость. В реактор емкость вводят технический углекислый натрий, который взаимодействует с кремнефтористоводородной кислотой, в результате чего образуются кристаллы кремнефторида натрия.

Далее реакционная масса (суспензия кремнефторид натрия) направляется в процесс центрифугирования. Из центрифуги влажный кремнефторид натрий подают в процесс сушки, а фугат снова возвращается в начало процесса – промывку кремнегеля. Результаты проведенных экспериментов приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Аналитические показатели кремнегеля

№	Внешний вид	SiO_2 % в пересчете на сухое вещество	H_2SiF_6, %	H_2O,%
После процесса сушки				
1	Пылевидный порошок белого цвета розового оттенка	96,6	следы	2,4
2		95,7	следы	3,2
3		97,4	следы	2,3
4		97,0	следы	2,6
5		96.1	следы	2/5

Таблица 2. Аналитические показатели кремнефторида натрия

№	Внешний вид	H_2SiF_6, %	H_2O,%	SiO_2%
1	Сыпучий мелкокристаллический порошок серого цвета	97,0	0,12	2,6
2		96,8	0,08	3,0
3		97,5	0,11	2,2
4		98,0	0,07	1,4
5		97,9	0,09	1,3

Как видно из таблицы 1, кремнегель после промывки и сушки по качественным показателям соответствует нормативно-техническим документам (ТУ 6-08-465-8) и может быть использован в качестве наполнителя резинотехнической, полимерной и фарфоровой промышленности.

Из таблицы 2 видно, что полученный кремнефторид натрия обладает стандартными свойствами (ГОСТ 87-81) и может быть применен в качестве инсектицида, в цементной промышленности, при производстве эмалей и для некоторых других целей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Изучена возможность переработки отходов производства фтористого алюминия на целовой промышленной продукции. Результаты реализации данного исследования помимо очевидного экономического эффекта позволяет безопасного управлении токсичных отходов производства фтористого алюминия.

Список литературы / References

1. *Позин М.Е.* Технология минеральных солей. Л.: Химия, 1974. 845 с.
2. *Зайцев В.А., Новиков А.А., Родин В.И.* Производство фтористых соединений при переработке фосфатного сырья. М.: Химия, 1982. 246 с.
3. *Мустафаев И.И., Гумбатов М.О.* Элемент созидание и разрушения. Ж. «Гражданская защита». М. № 8, 2018.
4. *Галкин Н.П., Зайцев В.А., Серегин М.Б.* Улавливание и переработка фторосодержащих газов. М.: Атомиздат, 1975. 240 с.
5. *Гумбатов М.О., Агаев Н.Б., Гусейнов Ю.Г.* // Научно техническая конференция по охране окружающей среды. Тез. докл. НПК. Баку, 1982. 51 с.

STUDY OF THE INFLUENCE OF MICROWAVE PREASSURE TREATMENT ON THE EXTRACTION OF REFRACTORY GOLD

Fuzaylov O.U. (Republic of Uzbekistan)
Email: Fuzaylov573@scientifictext.ru

Fuzaylov Omon Ubaydulloyevich - PhD Student,
METALLURGY DEPARTMENT,
NAVOI STATE MINING INSTITUTE, NAVOI, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *the paper presents the results of microwave pressure treatment of the raw and microwave roasted refractory flotation concentrate in order to study its effect. Investigation on microwave pressure treatment of refractory gold concentrate before and after roasting has shown significant improvements in gold recovery. The influence of temperature, pH of the medium and the content of hydrogen peroxide as an oxidizing agent were investigated. The results showed that additional microwave pressure treatment of the roasted concentrate for 60 minutes at 200 ºC, pH = 2 can increase the extraction rate of gold for an additional ~ 15%.*
Keywords: *refractory concentrate, gold, microwave, pressure treatment, extraction rate, roasting, encapsulated gold.*

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МИКРОВОЛНОВОЙ АВТОКЛАВНОЙ ОБРАБОТКИ НА ИЗВЛЕЧЕНИЕ УПОРНОГО ЗОЛОТА

Фузайлов О.У. (Республика Узбекистан)

Фузайлов Омон Убайдуллоевич – докторант,
кафедра металлургии,
Навоийский государственный горный институт, г. Навои, Республика Узбекистан

Аннотация: *в статье представлены результаты микроволновой автоклавной обработки исходного и обожженного микроволнами упорного флотационного концентрата с целью изучения его влияния. Исследование микроволновой автоклавной обработки упорного концентрата золота до и после обжига показало значительные улучшения в извлечении золота. Было исследовано влияние температуры, pH среды и содержания перекиси водорода как окислителя. Результаты показали, что дополнительная микроволновая автоклавная обработка обожженного концентрата в течение 60 минут при 200 ºC, pH = 2 может увеличить степень извлечения золота на ~ 15%.*
Ключевые слова: *упорный концентрат, золото, микроволны, обработка под давлением, степень извлечения, обжиг, капсулированное золото.*

The method of processing under pressure at temperatures above the boiling point of the solution and, therefore, at pressures above atmospheric, characterizes the pressure treatment. Pressurization above the boiling point releases the encapsulated gold grains from non-porous minerals and makes the ore or concentrate residue more amendable for gold recovery by cyanidation in a subsequent leaching step. Therefore, pressure treatment of gold-bearing ores is a pre-leach step to enhance gold recovery.

Investigation on microwave pressure treatment of refractory gold concentrate before and after roasting has shown significant improvements in gold recovery.

The influence of temperature, pH of the medium and the content of hydrogen peroxide as an oxidizing agent were investigated.

As the results show (table. 1.), hydrogen peroxide does not have a significant effect on the extraction rate of gold from the roasted concentrate, but according to the results No 10; 11; 12 a slight increase is noticed in the extraction rate of gold from the raw flotation concentrate with an increase in the content of hydrogen peroxide. With regard to the pH of the medium, in all samples, pH = 2 can be set as the optimal acidity parameter.

According to all the results, it is clear that temperature has a positive effect on the extraction that at 200 ° C the rate of gold extraction reaches to 90%.

Table 1. Results of microwave pressure treatment of the raw and MW roasted flotation concentrate

No	pH	τ, min.	T, ºC	P, atm.	Content H_2O_2, g/l	ε, % (from initial concentrate)	ε, % (roasted concentrate)
1	1	30	150	~ 5	0,0	43,4	78,6
2	2	30	150	~ 5	0,0	52,2	79,5
3	3	30	150	~ 5	0,0	50,6	78,4
4	1	60	180	~ 10	1,5	52,3	84,5
5	2	60	180	~ 10	1,5	52,4	84,8
6	3	60	180	~ 10	1,5	52,3	82,4
7	1	90	200	~ 15	3,0	52,5	89,8
8	2	90	200	~ 15	3,0	52,1	89,8
9	3	90	200	~ 15	3,0	52,2	88,7
10	**2**	**60**	**200**	~ 15	**0,0**	**51,2**	**89,6**
11	2	60	200	~ 15	1,5	52,6	89,8
12	2	60	200	~ 15	3,0	52,8	89,5

Figure 1. clearly shows a sharp change in the degree of gold recovery at 200 ºC, which indicates a change in the structure of minerals, which caused the release of the surface of gold particles.

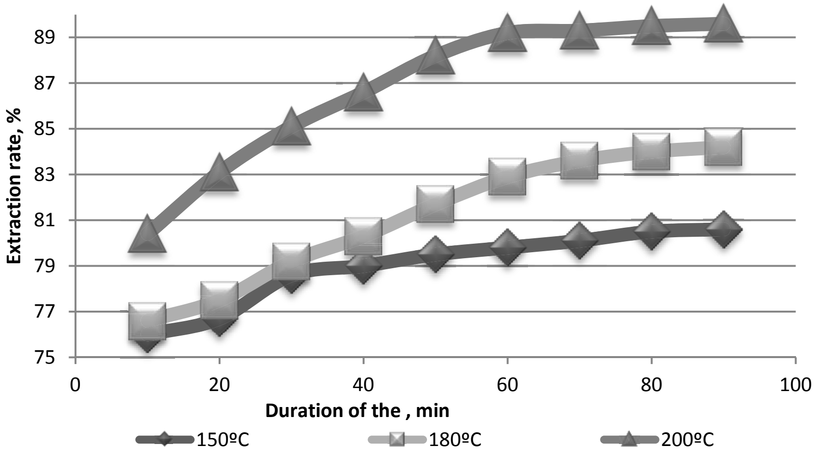

Fig. 1. Change in the extraction rate of gold in time at temperatures: 150°C; 180°C; 200°C

Thus, the results of cyanidation sorption of the treated concentrate showed that additional pressure treatment of the roasted flotation concentrate for 60 minutes at 200 ºC, pH = 2 can increase the gold extraction rate for an additional ~ 15%.

References / Список литературы

1. *Азимов О.А., Ермаков С.В., Лесков С.Ф., Плотникова А.В.* Модель расчета гранулометрического состава минерального сырья при его измельчении с использованием магнитно-импульсной обработки // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи, 2009. № 11. С. 3–9.
2. *Санакулов К.С., Фузайлов О.У., Кенбаева Ж.А.* Микроволновая обработка сульфидных золотосодержащих концентратов // Горный вестник Узбекистана, 2020. № 1. С. 53-56.

THE DEVELOPMENT OF ETHNOGRAPHIC TOURISM IN THE FERGANA VALLEY

Ismoilova P.Kh. (Russian Federation) Email: Ismoilova573@scientifictext.ru

Ismoilova Parvina Khamidjon qizi – Student,
MASTER'S PROGRAMME: APPLIED AND INTERDISCIPLINARY HISTORY,
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS, ST. PETERSBURG

Abstract: *the article analyzes the features of ethnograpihic tourism on the example of the Fergana Valley. The aim of the research is to identify the essence of ethnotourism and its development in the Fergana region. The tasks and prospects of ethnotourism. Ethnographic tourism contributes to the improvement of the lives of the families themselves. The inclusion of the local population in the reception of tourists causes him to be interested in thee preserving its own traditions and protecting the nature of his native land. The production and sale of handicrafts to visitors is also a reliable source of material well-being of the local population.*
Keywords: *the Fergana Valley, ethnoturism, craft, Man-Nature, development.*

КРИТЕРИИ ЭТНОГРАФИЧЕСКОГО ТУРИЗМА НА ПРИМЕРЕ ФЕРГАНСКОЙ ДОЛИНЫ

Исмоилова П.Х. (Российская Федерация)

Исмоилова Парвина Хамиджон кизи - студент,
магистерская программа: прикладная и междисциплинарная история,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Санкт-Петербург

Аннотация: *в статье рассматриваются особенности этнографического туризма на примере Ферганской долины. Цель исследования - определить сущность этнотуризма и его развитие в Ферганском регионе. Задачи и перспективы этнотуризма. Этнографический туризм способствует улучшению жизни и самих семей, принимающих у себя туристов. Включение местного населения в прием туристов вызывает у него заинтересованность в сохранении собственных традиций и охране природы родного края, а производство и реализация визитерам изделий ремесел и кустарного производства - это, кроме того, надежный источник материального благополучия местного населения.*
Ключевые слова: *Ферганская долина, этнотуризм, ремесло, Человек-Природа, развитие.*

На сегодня проекты, разработанные туристическими компаниями в рамках этнографического туризма, предлагают гостям страны в любое время года интересную программу отдыха с уникальной возможностью знакомства с нерастраченной культурой, традициями и бытом коренных народов, включая посещение национальных домов, проживание в семьях различных национальностей, участие в народных праздниках и гуляниях, ознакомление с местными народными промыслами, прикладным искусством и т.д. Этнографический туризм способствует улучшению жизни и самих семей, принимающих у себя туристов. Включение местного населения в прием туристов вызывает у него заинтересованность в сохранении собственных традиций и охране природы родного края, а производство и реализация визитерам изделий ремесел и кустарного производства - это, кроме того, надежный источник материального благополучия местного населения.

Однако, существует тенденция, при которой из-за неожиданно быстрого и глобального скачка в развитии современного туризма зачастую наблюдается дефицит профессионалов, способных удовлетворить запросы этого успешно развивающегося направления, в том числе и в области этнографического туризма.В селах, где уже есть гостевые дома или планируются, люди нуждаются в профессиональной поддержке с организацией ответственного туризма, не приносящего ущерба окружающей среде, содействующего экономическому и культурному развитию села, в тренингах для персонала гостевых домов по процедуре визовой поддержки и регистрации иностранных гостей и туристов, обучению навыкам эффективной рекламы и продвижению своего туристического продукта на международный рынок.

Для более успешного развития этнотуризма в Ферганской долине должны быть решены следующие задачи:

- разработка специальных законов и их правового механизма для формирования индустрии этнотуризма;
- разработка теоретических основ науки, образования и практики в сфере этнотуризма;
- повышение культуры населения посредством этнотуризма;
- решение вопросов социальной защиты местного населения с помощью этнотуризма;
- подготовка и переподготовка специалистов по этнотуризму;
- всесторонняя оценка этнотуристических объектов и ведение их кадастра;
- налаживание мониторинга и перспектив этнотуризма;
- изучение тактических планов, стратегических программ и мероприятий в сфере этнотуризма других стран и мирового сообщества;

Перспективно объединение этно- и экологического туризма в один пакет, ибо невозможно путешествовать по заповедным уголкам Ферганской долины не соприкасаясь с народами, их культурой, традициями, бытом. Это даст возможность турфирмам разрабатывать все новые и новые туры по Ферганской долине, делая акцент на комбинации *«Человек-Природа»* [1], но для этого необходимо готовить специалистов или кадры, хорошо ориентирующихся в обоих направлениях, а также умеющих грамотно обслуживать туристов. Турфирмам необходимо помнить, что, формируя пакет и готовя базу для приема туристов, важно начинать работу с образовательно-информационного компонента как для гидов и сотрудников охраняемых природных территорий, так и для сельских жителей [2]. Он должен быть основой для всех проектов по развитию этно- и экологического туризма. При условии создания условий и базы для развития этнотуризма в кадры, обучающие программы в селе и заповедниках, стране (профессиональные разнообразие ориентированных на этот вид туризма турфирм [3]) и государственной поддержки, туризм мог бы реально стать тем альтернативным источником дохода для Узбекистана, который уже не один десяток лет является основным источником для многих стран, ориентированных на туризм. Как было упомянуто выше, в городе Маргилане Ферганской долины туристы при посещении мастерских по производству шёлка смогут полюбоваться неповторимыми шелковыми творениями, прославленных мастеров – арбандов, бережно хранящих традиции народного шелкоткачества, и понаблюдать за процессом производства уникальных видов тканей.

В пятидесяти километрах от Ферганы находится небольшой город Риштан. С древних времен народы Риштанского района славились своими керамическими изделиями. На протяжении восьмисот лет из поколения в поколение передают мастера секреты производства керамических изделий из местных сортов красной глины и глазури из природных минеральных красителей и золы горных растений. Большие блюда *«лаганы»*, глубокие чаши *«шокоса»*, кувшины для воды, сосуды для молока, украшенные орнаментом из глазури *«ишкор»* [4] незабываемых бирюзовых и ультрамариновых цветов, принесли риштанским мастерам известность на многочисленных международных выставках, украшают экспозиции многих музеев мира и частные коллекции.

Таким образом, на сегодняшний момент на Земле проживают разные народы с различной культурой, религиозными верованиями и традициями. Год за годом возрастает большой потенциал познакомиться с религией, историей, традицией различных народов. Поэтому возрастает большой потенциал по изучению этнографических особенностей. Многие жители других стран изучают узбекский язык, чтобы почитать оригинальный текст узбекских мыслителей.

Список литературы / References

1. *Александрова Ю.Н.* Международный туризм. Учебник. М.: Аспект Пресс, 2017. С. 298-300.
2. *Артёмова Н.Д., Козлова А.В.* Основы гостеприимства и туризма. Учебное пособие. Орёл: Орёл ГТУ, 2019. С. 87.
3. *Чумаков К.К.* Этно-экологический туризм в сохранении природного и культурного наследия. М.: 2006. С. 46.
4. *Арифханова З., Абашин С., Алимова Д.* Узбеки. Народы и культуры. М.: Наука, 2011. С. 456.

PEDAGOGICAL SCIENCES

PHILOSOPHICAL ASPECTS IN CREATIVITY HUSSEIN JAVIDA

Rasuli I.K. (Republic of Azerbaijan) Email: Rasuli573@scientifictext.ru

Rasuli Irada Kafur kyzy – Candidate of Philological Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT OF LITERATURE AND LANGUAGES,
AZERBAIJAN STATE UNIVERSITY OF CULTURE AND ART,
BAKU, REPUBLIC OF AZERBAIJAN

Abstract: *the formation of philosophical views falls on the years of study of the great Azerbaijani writer Husein Javid, which coincides with the difficult early years of Turkey. The article shows the complexity of life and the unpredictable fate of healthy forces, spiritually pure and noble people. The struggle for justice becomes a struggle against the regime in which the writer himself lives. The tragic events of the fate of living people become the philosophical theme of the works created. One of the works describes the tragic events of an innocent family, which is a victim of the immorality of young Turkish noblemen, the problems of family life, even.*

Keywords: *Huseyn Javid, philosophical views, work, creativity, playwright.*

ФИЛОСОФСКИЕ АСПЕКТЫ В ТВОРЧЕСТВЕ ГУСЕЙНА ДЖАВИДА

Расули И.К. (Азербайджанская Республика)

Расули Ирада Кафур кызы – кандидат филологических наук, доцент,
кафедра литературы и языков,
Азербайджанский государственный университет культуры и искусства,
г. Баку, Азербайджанская Республика

Аннотация: *формирование философских взглядов приходится на годы учебы великого азербайджанского писателя Гусейна Джавида, которые совпадают с тяжелыми начальными годами Турции. В статье показана сложность жизни и непредсказуемая судьба здоровых сил, духовно чистых и благородных людей. Борьба за справедливость становится борьбой против режима, в котором живет и сам писатель. Трагические события судьбы живущих людей становятся философской темой созданных произведений. В одном из произведений описаны трагические события невинной семьи, которая является жертвой безнравственности молодых турецких дворян, проблемы семейной жизни, быта.*

Ключевые слова: *Гусейн Джавид, философские взгляды, произведение, творчество, драматург.*

Философские взгляды Гусейна Джавида прививают читателям гуманизм и сегодня сохранили свою реальность и актуальность.

Невозможно полностью изучить и оценить творчество Гусейна Джавида без анализа его обширного и всестороннего литературного наследия. Здесь надо учитывать единство и взаимосвязь Востока и Турции. Следовательно, человек, чтобы возвыситься, должен освободиться от диких целей и нечеловеческих созданий. Родина и ее свобода стоят превыше всего. По сравнению с начальными произведениями, написанными в новом периоде его творчества, после затронуты более реальные проблемы. Если в таких произведениях как «Обрыв», «Шейх Сенан», «Сатана» «Катастрофа» и «Бедствие» писатель искал свободу в бесконечностях вдали от человеческого общества, романтических местах, то теперь он верит, что найдет ее в объятьях революции. Писатель приходит к такому философскому выводу, что несчастные всей планеты разделяют одинаковую участь. Пока в мире существуют кровопийцы, жадные люди, которых кроме своей выгоды ничего не интересует, угнетенная часть останутся несчастными.

Поэма «Азер» (1926–1937), пьесы «Мать» (1910), «Марал» (1912), «Шейх Санан» (1914), «Шейда» (1916), «Пропасть» (1917), «Дьявол» (1918), «Афет» (1922), «Пророк» (1922), «Хромой Теймур» (1925), «Князь» (1929), «Звонкострунный саз» (1931), «Сиявуш» (1933), «Шахла» (1934), «Хайям» (1935), «Месть дьявола» (1936) и другие произведения великого поэта стали яркими событиями в азербайджанском литературном процессе первой половины XX столетия. В 1917 в Баку был издан его второй сборник «Весенняя роса». Поэт написал множество стихотворений и поэм в романтическом стиле, прославившись в азербайджанской литературе как автор лирико-романтических стихов и лирико-эпических поэм, а также как создатель первых стихотворных трагедий и драм. В своих произведениях Гусейн Джавид представив яркую галерею сильных, неординарных героев, бунтующих против несправедливости, тирании и произвола раскрыл власть тёмных сил и изобразил контрасты эпохи. В этих произведениях отражены философские взгляды автора. Эти пьесы явились важной вехой в развитии романтизма, сохранили обаяние и идейно-эстетический мир этого направления, возникшего в азербайджанской литературе в начале прошлого века. В творчестве поэта главенствуют вечные, животрепещущие проблемы, непреходящие общечеловеческие темы и образы, и они понятны и близки также нынешним почитателям.

Иранские годы драматурга происходили с 1898 года по март 1903 года. В июле 1903 года он отправился в Стамбул для получения высшего образования. Поскольку он болел в Стамбуле и не смог продолжить свое образование. После приезда в Нахичевань в 1904 году, с марта по апрель 1905 года был в Баку.

Говоря о жизни и деятельности поэта в последующие годы, академик М. Джафар пишет: «В мае 1905 года Джавид отправился в Стамбул во второй раз. Целью поэта было поступить в колледж и получить высшее образование. Но поскольку официальной бумаги о среднем образовании не было, он не смог достичь этой цели сразу. Во-первых, 5-6 месяцев он подготовился и сдал экзамены по программе средней школы. Потом, только после этого, он мог пойти в литературный отдел Дарфуна» [1].

В работах великого азербайджанского писателя Гусейна Джавида, который создал сцену в истории азербайджанской драмы. Он возглавляет новое литературное движение, где также были представлены работы о жизни Турции.

Литератор своим творчеством, отличающимся глубоким философско-эстетическим содержанием, заложил основу нового этапа в нашей литературе. Его произведения, написанные в разных жанрах и основанные на мировых традициях романтизма, занимают достойное место в сокровищнице художественной мысли нашего народа. Драматургия Джавида сыграла важную роль в театральной культуре нашей страны. Гусейн Джавид столкнулся с финансовыми трудностями во время учебы в Турции, но не потерял образование. Поэт написал в одном из своих писем: «Я предпочту быть носильщиком и обслуживание и не хочу продавать эти знания и счастье в определенный период времени. Если есть что-то, что я в плену, он - правда и все еще раз правда. Я не согласен отключить цепь, уменьшить ее» [1].

Гусейн Джавид, тесно связанный с национальной идеологией народа, неутомимо трудился на пути просвещения, привнес в нашу литературу героические образы. Во время своего пребывания в Турции он понимал мятежный характер существующего режима и критиковал идею зажатия свободы мысли и выражения.

Давайте взглянем на следующую идею критиков Мустафы Гулиева, чтобы получить общее представление о том периоде, когда Джавид жил в Турции и был тесно связан с турецкой интеллигенцией. «Революция 1905 года заставила турецкого султана усугубить сектантство. Сломать жизнь, скупость, безнравственность и преследования усугубляются. Все устали от этой адской жизни и жили в надежде восстании. Интеллигентные газеты сильно заняты интеллигенцией и имеют политические идеи, конгрессы в Париже» [2]. В этот период творческий поиск выдающихся писателей Турции для развития национальной литературы привел их к романтизму. Потому что им казалось, что жанр романтической драмы - единственный жанр, прославляющий борьбу против феодализма и идеологических направлений» [3].

В те годы в мировоззрении Гусейна Расизаде были противоречия. Он видел развитие Азербайджана, счастливое будущее и светлое будущее только в просвещении людей. «Нам нужна только школа. Революция цивилизации - это школа культуры», - сказал поэт, который не видел важных общественных причин отсталости на фоне Азербайджана.

Таково было отношение Расизаде к этому вопросу. Он даже видел отказ от всех иранцев и кавказцев, а также причину их неволи и рабства, когда они покидали свою культуру.

Гусейн Расизаде продолжил литературную деятельность в учебе в Турции. Лирические и сентиментальные стихи поэта являются продуктом тех лет. Однако после того, как поэт вернулся на родину, он написал пьесы «Катастрофа» и «Бедствие» после жизни Турции, и в этих произведениях отражены философские взгляды автора, трагическая и жалкая жизнь турецкой знати, противоречия и заблуждения существующей социальной структуры.

Комментируя этот период в творчестве Гусейн Джавида, профессор Тимучин Афандиев пишет: «Такая связь, взаимоотношения, прямой контакт со зрителем и сценой философских теней, сближение, желания, близость идей, жизненные установки, общество и отношение к искусству характеризуют» [4].

Формирование философские взглядов Гусейн Расизаде происходили в годы, когда он учился в Турции, и тогда описал трагические события невинной семьи, которая является жертвой безнравственности молодых турецких дворян, проблемы семейной жизни, быта. Имя плагиата не измеряется смертью героя произведения. Трагедия здесь - весь мир, окружающая среда затоплена, и различные роковые люди не смогли пережить это бедствие. Обратим внимание на критику Масуда Алиоглу: «Не случайно все пьесы, упомянутые автором (Гусейн Джавид – И.Р.), являются трагедией. Трагедия была использована для определения жанра драмы. В широком смысле он призван показать сложность жизни и разрушительную судьбу позитивных сил, чистых и благородных людей. Хотя трагическая судьба людей в драме отличается от направления жизни, факторы, вызвавшие трагедии, получили один и тот же источник. Трагедия накрыла всю жизнь. Трагедия охватила всю окружающую среду, существование различных слоев общества» [6].

Творчество выдающегося поэта и драматурга Гусейна Джавида богато поэтической мыслью. Герои произведений крупнейшего представителя азербайджанского романтизма отличаются духовным богатством, вынашивают мечты и надежды, формируют свои идеалы. Надо подчеркнуть, что романтизм в азербайджанской литературе, соединив национальное самосознание и общечеловеческие идеалы, сыграл большую роль в обогащении художественной мысли. Яркий могикан этого литературного течения, Гусейн Джавид также прославился как основатель романтической драматургии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Гусейном Джавидом показана сложность жизни и разрушительная судьба позитивных сил в начале XX века, условия, в которых жил и работал великий писатель, были невыносимы. После жизни Турции и в своих произведениях, написанных после, резко критиковал трагическую и жалкую жизнь турецкой знати, противоречия и заблуждения существующей социальной структуры.

Богатое наследие Гусейна Джавида всегда сохраняет свою актуальность, ученые обратились к творчеству драматурга, вписавшего яркую страницу в историю нашей литературы как один из выдающихся представителей романтизма.

Список литературы / References

1. *Джафар* М. «Гусейн Джавид». Баку. Азернешр, 1960. С. 27.
2. *Гулиев Мустафа.* «Современная турецкая литература и история». Образование и культура. Баку, 1926. С. 12.
3. *Дадашзаде Мамед Ариф*. «Азербайджанская литература». Москва, «Высшая школа», 1979, 232 с.
4. *Эфендиев Тимучин.* «Мир идей Хусейна Джавида». Баку, Писатель, 1985. С. 105.

5. *Джавид Гусейн.* «Пьесы в двух книгах». Автор предисловия: Яшар Караев. Баку. «Язычы», 1982. 341с.; 1983. 450 с.
6. *Джавид Гусейн.* «Избранные произведения». Баку. Азернешр,1968. с. 13.

DEVELOPMENT OF THE CREATIVE ABILITIES OF STUDENTS AS A FACTOR OF SUCCESSFUL PROFESSIONAL ADAPTATION OF FUTURE SPECIALISTS PRESCHOOL EDUCATIONAL INSTITUTION

Ramazanova E.A.[1], Veliulaeva E.A.[2] (Russian Federation)
Email: Ramazanova573@scientifictext.ru

[1]Ramazanova Elmira Asanovna - PhD in Pedagogy, Associate Professor;
[2]Veliulaeva Esma Adyr kyzy - Student,
DEPARTMENT OF PRESCHOOL EDUCATION AND PEDAGOGY,
CRIMEAN ENGINEERING-PEDAGOGICAL UNIVERSITY FEVZI YAKUBOV,
SIMFEROPOL, REPUBLIC OF CRIMEA

***Abstract*: *the article describes experimental work on the development of creative abilities of students in the field of training "Preschool education" as a factor of their successful professional adaptation. The criteria and indicators of development of students ' creative abilities as a factor of their successful professional adaptation (personal criterion, cognitive criterion, value criterion, behavioral criterion) are listed. A set of pedagogical conditions is also described. The results of experimental work on the development of students ' creative abilities as a factor of their successful professional adaptation are presented.*
Keywords: *vocational education, adaptation, professional adaptation, preschool teachers, creativity, criteria, experiment.*

РАЗВИТИЕ ТВОРЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ КАК ФАКТОР УСПЕШНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ АДАПТАЦИИ БУДУЩИХ СПЕЦИАЛИСТОВ ДОШКОЛЬНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Рамазанова Э.А.[1], Велиулаева Э.А.[2] (Российская Федерация)

[1]Рамазанова Эльмира Асановна - кандидат педагогических наук, доцент;
[2]Велиулаева Эсма Адыр къызы - студент,
кафедра дошкольного образования и педагогики,
Крымский инженерно-педагогический университет им. Февзи Якубова,
г. Симферополь Республика Крым

Аннотация: *в статье описана опытно-экспериментальная работа по развитию творческих способностей студентов направления подготовки «Дошкольное образование», как фактора их успешной профессиональной адаптации. Перечислены критерии и показатели развития творческих способностей студентов, как фактора их успешной профессиональной адаптации (личностный критерий, когнитивный критерий, ценностный критерий, поведенческий критерий). Также описан комплекс педагогических условий. Представлены результаты экспериментальной деятельности по развитию творческих способностей студентов, как фактора их успешной профессиональной адаптации.*
Ключевые слова: *профессиональное образование, адаптация, профессиональная адаптация, педагоги дошкольного образования, творчество, критерии, эксперимент.*

В современном обществе будущему специалисту особенно важно найти свое место, адаптироваться, получить навыки быстрого вхождения в профессию, поэтому проблема профессиональной адаптации является актуальной в наше время. Для того чтобы сотрудник мог максимально эффективно использовать свои знания, умения и опыт, ему необходимо уметь приспосабливаться к специфике организации, проникнуться ее целями и задачами, найти общий язык с коллегами и руководством. Все это обобщается в термине «профессиональная адаптация».

В самом общем виде профессиональная адаптация (лат. adaptio –приспособляю) – процесс приспособления работника к условиям внешней и внутренней среды [1].

Творческая характеристика профессиональной деятельности указывает на необходимость развития творческих способностей будущих специалистов для развития интереса к профессиональной деятельности у студентов.

Задачей констатирующего эксперимента стало определение исходного уровня развития творческих способностей будущих специалистов ДОУ как фактора их успешной профессиональной адаптации в группе А и группе Б.

Опираясь на исследования Е.А. Раменских и в результате анализы литературы, нами были отобраны критерии эффективности профессиональной и социальной адаптации обучающихся (личностный критерий, когнитивный критерий, ценностный критерий, поведенческий критерий) [2].

Сформированность каждого из критериев конкретизировалась рядом показателей: готовность к самосовершенствованию, профессиональная направленность, социальная адаптация, социальная активность. Учитывая цели и задачи нашего исследования, мы выделили следующие критерии оценки развития творческих способностей студентов в вузе как фактор успешной профессиональной адаптации: когнитивный, ценностный, личностный.

Для исследования сформированности выделенных нами компонентов развития творческих способностей будущих специалистов ДОУ как фактора их успешной профессиональной адаптации, исходя из их содержания, в экспериментальной деятельности мы применяли: тест мотивации достижения успеха и избегания неудач А.А. Реана; методику В.С. Дудченко «Диагностика содержательной составляющей готовности студентов педагогического вуза к инновациям в педагогической деятельности» (когнитивный компонент); методику оценки конкурентоспособности В.И. Андреева («Педагогика творческого саморазвития); методику В.И. Андреева «Оценка творческого потенциала студентов педагогического вуза» и методику И.Е. Пискаревой «Диагностика степени развитости у студентов педагогического вуза механизмов творческой деятельности, механизмов креативности; определение восприимчивости, открытости проблемам».

Значения показателей, полученные в результате обработки данных констатирующего эксперимента, свидетельствуют преимущественно о среднем и низком уровне развития творческих способностей обучающихся в вузе как фактора профессиональной адаптации, что обусловило целесообразность внедрения педагогических условий по развитию творческих способностей обучающихся в вузе как фактора профессиональной адаптации. Нами были определены критерии и показатели уровня сформированности творческих способностей студентов, как фактора их успешной профессиональной адаптации, кроме того были разработаны цели, задачи, содержание и структура учебно-методических материалов по дисциплине «Педагогическое творчество воспитателя», а также разработана и внедрена в образовательный процесс вуза программа по развитию творческих способностей студентов.

В качестве условий, способствующих успешному развитию творческих способностей студентов вуза как фактора профессиональной адаптации, нами выделены:

а) организационно-педагогические условия: выделение развития творческих способностей студентов в качестве специальной цели образования в вузе; построение учебного процесса с помощью внедрения арт-терапевтических и игровых техник как основы для развития творческих способностей студентов; поддержка субъект-субъектного взаимодействия преподавателя и студентов;

6) дидактические условия: диагностика актуальных и перспективных уровней развития творческих способностей студентов в образовательном пространстве вуза; стимулирование и поддержка преподавателем творческой активности студентов путем создания специальных ситуаций; реализация индивидуально- дифференциированного подхода в процессе развития творческих способностей студентов;

в) психолого-педагогические условия: создание в совместной деятельности студентов и преподавателя благоприятного психологического климата, способствующего развитию творческих способностей студентов; создание для студентов ситуаций успеха, позволяющих компенсировать возможные личностные трудности в обучении, самоопределении личности; обеспечение преподавателем возможности активного участия студентов в вариативной творческой деятельности [2].

В ходе исследования установлено, что каждое из этих условий обладает своими локальными возможностями, в то же время их единство и взаимосвязь образуют органичное единство среды, разные направления педагогической деятельности и свободный выбор форм для реализации самостоятельного инновационного опыта студента, активизируют креативное мышление и рефлексию собственной деятельности будущего педагога, обеспечивают мотивацию успеха во взаимодействии субъектов процесса профессиональной подготовки.

Покритериальный анализ уровней развития творческих способностей обучающихся в вузе как фактора профессиональной адаптации показал, что реализация выделенных педагогических условий способствовала повышению эффективности данного процесса, что доказано его положительной динамикой во время проведения эксперимента. Это проявилось в увеличении количества студентов экспериментальной группы, обладающих средним и высоким уровнем развития творческих способностей обучающихся в вузе как фактора профессиональной адаптации.

Таким образом, в ходе проведения опытно-экспериментальной работы была доказана эффективность выявленных педагогических условий развития творческих способностей студентов вуза как фактора профессиональной адаптации. Выполненное исследование не исчерпывает всех аспектов данной проблемы. Представляется, что предметом дальнейшего изучения могут стать такие аспекты проблемы, как теоретическая и практическая разработка комплексного подхода к развитию творческих способностей студентов вуза как фактора профессиональной адаптации в процессе реализации образовательной программы на всех курсах подготовки будущих специалистов ДОУ.

Список литературы / References

1. *Ащепков В.Т.* Профессиональная адаптация преподавателей высшейшколы: проблемы и перспективы / В.Т. Ащепков. Ростов-на-Дону: Принт, 1997. 144 с.
2. *Раменских Е.А.* Развитие творческих способностей студентов как фактор успешной профессиональной адаптации будущих специалистов на примере сферы сервиса и туризма / Е.А. Раменских, В.М. Петровичев. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. 264 с.

COGNITIVE APPROACH TO THE FORMATION OF READING CULTURE SKILLS IN STUDENTS

Malikova D.M. (Republic of Uzbekistan)
Email: Malikova573@scientifictext.ru

Malikova Dilrabohon Mahmudovna - Doctoral Student,
SCIENTIFIC-RESEARCH INSTITUTE OF PEDAGOGICAL SCIENCES OF UZBEKISTAN NAMED AFTER T.N. KARY NIYAZI,
TASHKENT, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *this article is devoted to the analysis of the essence, specific features of the cognitive approach to the formation of reading culture skills in students. It also reflects the difficulties that students face in the process of reading, the problems of overcoming them. The implementation of a high level of cognitive activity allows students to constantly practice their reading culture skills. As reading skills improve, cognitive processes become more complex and students' mental performance increases. This should increase the amount of work available to students from class to class.*
Keywords: *reading, reading culture, skill, comprehension, cognitive approach, imagination, active memory, vocabulary, mental functions, direct attention.*

КОГНИТИВНЫЙ ПОДХОД К ФОРМИРОВАНИЮ НАВЫКОВ КУЛЬТУРЫ ЧТЕНИЯ У УЧЕНИКОВ

Маликова Д.М. (Республика Узбекистан)

Маликова Дилрабохон Махмудовна – докторант,
Научно-исследовательский институт педагогических наук Узбекистана им. Т.Н. Кары Ниязи,
г. Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *данная статья посвящена анализу сущности, особенностей когнитивного подхода к формированию у студентов навыков культуры чтения. Это также отражает трудности, с которыми студенты сталкиваются в процессе чтения, проблемы их преодоления. Реализация высокого уровня познавательной деятельности позволяет учащимся постоянно практиковать свои навыки культуры чтения. По мере улучшения навыков чтения, когнитивные процессы усложняются, а умственная деятельность учащихся усиливается. Это должно увеличить количество работ, доступных учащимся от класса к классу.*
Ключевые слова: *чтение, культура чтения, умение, понимание, когнитивный подход, воображение, активная память, словарный запас, психические функции, непосредственное внимание.*

Although the process of teaching a person to read has been somewhat pedagogically improved, students' reading skills have not been sufficiently developed. Having a culture of reading facilitates the understanding of the world, serves to develop human communication competence. As a result, students rise to a level where they understand the essence of the text, understand it, discuss it.

Understanding the text first of all encourages students to understand the work, to grasp its essence, to assimilate the social experience and knowledge expressed in it. Psychologists, educators and sociologists pay special attention to the development of a person's reading culture.

Cognitive approach is a priority in the development of a person's reading culture. The cognitive approach serves to help students acquire reading culture skills as well as to ensure the quality and effectiveness of the pedagogical process. As a result of relying on a cognitive approach, students who did not master the reading technique in the first place also face some difficulties. To do this, the educator must first work on the development of students' reading techniques [1].

When a reader begins to read, the main task before him is to clearly understand the content of the text. Understanding the content of a text is directly related to the cognitive activity of the reader. To understand the content of a text, the reader must first know the meaning of the words well. A good understanding of a word requires a deep understanding of its semantics. In order to understand the content of the text, to read it in parts, to know the complete content expressed in each part, on this basis to have a holistic idea of the idea of the work, to ensure its full comprehension.

A number of factors play an important role in shaping reading culture skills in students. These are: the student's worldview, views, attitudes to the heroes of the work of art, the level of understanding of the content of the text, vocabulary, figurative thinking, cognitive activity, aesthetic taste, etc. [2].

Working with cognitive models also plays a special role in shaping the reading culture of the student. An important aspect of these models is to ensure that the reader is able to fully visualize reality based on an understanding of the content of the work. In doing so, the reader understands the essence by identifying the words, phrases and the interrelationships between them in the text, and thus forms the image of the text. Other models focus on the direction of movement in the comprehension process and the skills needed to understand reading.

Although many models focus on the components of reading, they are based on the main idea, which is to understand the content of the text. It includes the information given in the text, the previously learned information that belongs to it, and the semantic tools that link them. Semantic connections are determined by the reader using the ability to draw passive and strategic conclusions. Passive summarization processes are performed automatically by the reader, but strategic processes require special attention and active memory of the reader. The application of active attention and memory will depend on the personal characteristics and experience of the reader. In addition, how the reader reads the text, i.e. how deeply the text is mastered, affects the reader’s attention and memory.

The result of reading comprehension is that the reader creates an image through semantic connections in the text. The formation of such an image takes place gradually in the process of reading. It is important to have a clear idea of the inticulators that will result from the reading process. Because the indicators at the end of the reading are formed at a certain stage of the reading and are evaluated by the teacher. Each new piece of information learned during the reading is processed by the reader using several cognitive tasks [3].

Applying the right strategies at the right time during the reading is the key to ensuring an effective outcome. Therefore, students whose reading techniques are not sufficiently formed find it difficult to understand which behaviors are important to perform in cognitive processes. Measures aimed at ensuring the speed of the student's reading during the reading process have a significant impact on the formation of a culture of reading.

Cognitive processes that serve to form a culture of reading in students can be divided into two:

- processes that allow the text to be divided into components according to the content;
- high-level processes that allow the formation of a coherent text by logically linking the components together.

In such processes, students are required to think logically. As experts point out, the initial cognitive processes include understanding the content of a text, breaking it down into its components, having a certain vocabulary, and knowing the main idea expressed in the text. To form these types of skills, educators should use the text analysis method. In reading the text, it is important to make judgments, to summarize one's opinion, to integrate the text into parts, to understand the logical connection between words. With these skills, the reader will be able to connect different parts of the text. In this process, students develop intuitive, deductive thinking. They will be able to master the ability to integrate any text into parts. Students who have the ability to think intuitively and deductively in the process of reading, the ability to create creativity, independent text is constantly developing.

The use of memory power is important for the effective formation of reading culture skills in students. Because the reader focuses on the main aspects of the text he is reading. He is able to independently search for the ideological basis of the work [4].

It is desirable that the formation of a culture of reading in students is carried out in a systematic manner, ensuring the full flow of all cognitive processes. Early cognitive processes, including composing small texts, separating the main idea in a text, and interpreting word meanings, take place in the early stages of learning. Implementing a high level of cognitive activity allows students to continuously practice their reading culture skills. As reading culture skills improve, cognitive processes become more complex and students' mental activities intensify. This is to increase the number of works available to students from class to class, to organize the process of working on them, to create favorable conditions for them to demonstrate their reading skills, to encourage students to read new books on a regular basis, depending on their age and psychological characteristics. serves to ensure the effectiveness of pedagogical activities in this area.

References / Список литературы

1. Fo Albrecht J.E. & O'Brien E.J., 1993. Updating a mental model: Maintaining both local and global coherence. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition. 19, 1061–1070.
2. *Baddeley A.,* 2003.Workingmemoryandlanguage:Anoverview.Journal of Communication Disorders, 36 (3), 189–208. Blanc, N., Kendeou, P., van den Broek, P., & Brouillet, D. (2008). Updating situationmodels: Empirical data and simulations. Discourse Processes. 45, 103–121.
3. *Cain K.* (2006). Individual differences in children's memory and reading comprehension: An investigation of semantic and inhibitory deficits. Memory. 14 (5), 553–569.
4. *Van den Broek P., Helder A. & Van Leijenhorst L.,* 2013. Sensitivity to structural centrality: Developmental and individual differences in reading comprehension skills. In M. A. Britt, S. R. Goldman, & J.-F. Rouet (Eds.), Reading: From words to multiple texts (pp. 132–146). New York: Routledge, Taylor & Francis Group.
5. *Akramova G.R., Akramova S.R*. Developing critical thinking on elementary class pupils is the most important factor for preparing social relationship. JOURNAL OF CRITICAL REVIEWS. ISSN- 2394-5125 VOL 7, ISSUE 17, 2020. [Electronic Resource]. URL: http://www.jcreview.com/?sec=cissue/ (date of access: 23.09.2020).
6. *Akramova G.R.* Modern approaches to the development of critical thinking of students. European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences. Vol. 7. № 11, 2019 ISSN 2056-5852.
7. *Renatovna A.G*. Psychological and pedagogical foundations for the development of critical thinking of students // ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal, 2020. Т. 10. № 4. S. 581-584.
8. *Renatovna A.S.* Interpretation of lexical and semantic features of uzbek-tajik words in jamal kamal's poem "Uzbek language. ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal Year: 2020, Volume: 10, Issue: 5 First page: (1434) Last page: (1440) Online ISSN: 2249-7137. Article DOI : 10.5958/2249-7137.2020.00342.0/
9. Akramova S.R. Rol' interaktivnykh tekhnologiy v razvitii informatsionnoy kompetentsii uchashchikhsya // European research. № 2 (60), 2020. S. 85-88.
10. *Jamilova B.S., Safarova N.O.* Basics of Uzbek Children's Reading. [Electronic Resource]. URL: http://www.testmagzine.biz/index.php/testmagzine/article/view/573/513/ (date of access: 23.09.2020).
11. *Kasimova Z.Kh.* PROFESSIONAL ORIENTATION OF COMMUNICATIVE COMPETENCE OF STUDENTS. [Electronic Resource]. URL: https://scientific-publication.com/images/PDF/2020/51/EUROPEAN-SCIENCE-2-51-II-A.pdf/ (date of access: 23.09.2020).
12. *Ruziyeva Mohichehra Yokubovna.* About color symbols in folklore. JCR. 2020; 7(17): 461-466. doi: 10.31838/jcr.07.17.64.

13. *Касимова З.Х.* Особенности национальных ценностей и межкультурных коммуникаций в содержании гуманитарного образования // Вестник науки и образования. № 22 (76), 2019. [Electronic Resource]. URL: http://scientificjournal.ru/images/PDF/2019/VNO-76/osobennosti-natsionalnykh_1.pdf/ (date of access: 23.09.2020).
14. *Amonov Sultonovich Ulugmurod.* Abdurauf fitrat is one of the earliest researchers of Uzbek folklore. ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal. Year: 2020, Volume: 10, Issue: 6. First page: (669) Last page: (673). Online ISSN: 2249-7137. Article DOI: 10.5958/2249-7137.2020.00616.3
15. *Makhmudova Darmonjon Bozorboevna.* DESIGN AS A MEANS OF AESTHETIC EDUCATION. ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal, 2020. Vol. 10 Issue 9. First page: (176) Last page: (182) Online ISSN: 2249-7137. DOI 10.5958/2249-7137.2020.01040.

AN INTEGRATIVE APPROACH IN THE FORMATION OF BASIC COMPETENCIES OF STUDENTS IN THE EDUCATIONAL PROCESS

Sharifzoda S.U. (Republic of Uzbekistan)
Email: Sharifzoda573@scientifictext.ru

Sharifzoda Sardorbek Urazboy tabib ugli - Doctoral Student,
DEPARTMENT OF PEDAGOGY AND PSYCHOLOGY, FACULTY OF PEDAGOGY,
URGENCH STATE UNIVERSITY, URGENCH, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *the article discusses an integrative approach to the formation of basic competencies of students in the educational process. Informatization and information technologies create new conditions for transnational education, contributing, on the one hand, to increase the mobility of students and teachers in the virtual space (variety of educational materials, flexible learning modes, choice of providers of higher education, etc.). On the other hand, this poses the problem of updating domestic education with an orientation towards international requirements, the multidisciplinary nature of educational programs, and a high level of information competence of students.*
Keywords: *integrative approach, formation, competence, educational process.*

ИНТЕГРАТИВНЫЙ ПОДХОД В ФОРМИРОВАНИИ БАЗОВЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ УЧАЩИХСЯ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Шарифзода С.У. (Республика Узбекистан)

Шарифзода Сардорбек Уразбой табиб угли – докторант,
кафедра педагогики и психологии, факультет педагогики,
Ургенчский государственный университет, г. Ургенч. Республика Узбекистан

Аннотация: *в статье рассматривается интегративный подход в формировании базовых компетенций учащихся в образовательном процессе. Информатизация и информационные технологии создают новые условия транснационального образования, способствующие, с одной стороны, повышению мобильности студентов и преподавателей в виртуальном пространстве (многообразие учебных материалов, гибкие режимы обучения, выбор провайдеров высшего образования и др.). С другой стороны, это ставит проблему обновления отечественного образования с ориентацией на международные требования, полипредметный характер образовательных программ, высокий уровень информационной компетентности обучающихся.*
Ключевые слова: *интегративный подход, формирования, компетенция, образовательный процесс.*

Методологическая стратегия интегративного подхода ориентирует исследователя на целостное объединение (интеграцию) однородных и разнородных компонентов систем при решении образовательных задач. Интегративный подход в образовании позволяет смягчить недостатки дифференциации в рамках междисциплинарной расчлененности содержания образования на основе выбора некоторого интегрирующего основания [1]. В частности, междисциплинарная интеграция имеет своей целью синтез обобщенных междисциплинарных структур некоторого нового уровня их содержания и выделения способов деятельности, переносимых на разные дисциплинарные области.

Междисциплинарная интеграция реализуется в разных моделях её осуществления:

- интеграция дисциплин, входящих в одну и ту же образовательную область;
- интеграция дисциплин, входящих в разные образовательные области: такой вид интеграции осуществляется, например, при синтезе естественнонаучных и гуманитарных дисциплин учебного плана;
- интеграция на основе доминирования одной из дисциплин, когда другие выступают в качестве дополнительного вспомогательного средства.

В условиях междисциплинарной интеграции у обучающихся формируется целостное представление об изучаемом (исследуемом) объекте на основе использования общенаучных методов познания (анализ, синтез, обобщение, абстрагирование, классификация, сравнение, индукция, дедукция, моделирование, аналогия), которые выступают основанием интеграции. Отметим, что междисциплинарная интеграция базируется на синтезе содержания учебных дисциплин [5]. Другим основанием интеграции может выступать усиление практической или практико-профессиональной направленности образовательного процесса в соответствии с уровнем образования. Это определяет интеграцию во имя достижения новых результатов образования, выражающихся в освоенных способах деятельности на основе получения опыта при самостоятельном решении проблем.

Компетентностный подход определяет результат образования как «общий интегральный социально-личностно-поведенческий феномен в совокупности мотивационно-ценностных, когнитивных, интерактивных и эмпирических составляющих» [3].

Контекст новых требований к человеку в этих условиях определяет необходимость формирования в образовании особых качеств личности:

- способности решать проблемы современной жизни в политической, экологической, межкультурной сферах;
- способности решения проблем аксиологической сферы посредством ориентации в мире духовных ценностей с учетом многообразия социальных, культурных, этнических, религиозных ценностей и различий, форм современной культуры, а также средств и способов межкультурных коммуникаций;
- способности к исполнению необходимых социально-ролевых функций гражданина, избирателя, члена семьи, родителя и др.;
- универсальных умений в поиске и анализе информации;
- способности принимать решения в случаи многовариантной ситуации, в том числе и в условиях неопределенности, нести ответственность за принятые решения, работать в команде и организовывать командную деятельность;
- способности к непрерывному образованию, развитость познавательной деятельности.

Сущность компетентности выражается в её деятельностной природе (присвоенная компетенция), которая определяется как динамическая личностная характеристика субъекта продуктивной деятельности в определенной сфере, в то время как компетенция задает общие требования, которые предъявляются к человеку для выполнения определенной деятельности.

Формирование и развитие компетентности обучающихся в образовательном процессе вуза рассматривается исследователями через создание специальных педагогических условий, конкретизирующих компоненты педагогической системы. Эти условия касаются углубления, расширения, обогащения содержания образования, выбора адекватных педагогических технологий, вовлекающих обучающихся в деятельность, соответствующих субъект-субъектному взаимодействию участников образовательного процесса.

Глобализационные процессы в мире проектируют новую модель мироздания, расширяющего возможности человека в образовательной, профессиональной и социальной сферах.

Информатизация и информационные технологии создают новые условия транснационального образования, способствующие, с одной стороны, повышению мобильности студентов и преподавателей в виртуальном пространстве (многообразие учебных материалов, гибкие режимы обучения, выбор провайдеров высшего образования и др.). С другой стороны, это ставит проблему обновления отечественного образования с ориентацией на международные требования, полипредметный характер образовательных программ, высокий уровень информационной компетентности обучающихся.

Список литературы / References

1. *Akramova G.R., Akramova S.R.* Developing critical thinking on elementary class pupils is the most important factor for preparing social relationship. Journal of critical reviews. ISSN- 2394-5125. Vol. 7. ISSUE 17, 2020. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.jcreview.com/?sec=cissue/ (дата обращения: 23.09.2020).
2. *Renatovna A.S.* Interpretation of lexical and semantic features of uzbek-tajik words in jamal kamal's poem “Uzbek language. ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal, 2020. Volume: 10. Issue: 5. P. 1434-1440). Online ISSN: 2249-7137. Article DOI: 10.5958/2249-7137.2020.00342.0.
3. *Акрамова С.Р.* Роль интерактивных технологий в развитии информационной компетенции учащихся // European research. № 2 (60), 2020. С. 85-88.
4. *Kasimova Z.Kh.* Professional orientation of communicative competence of students. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://scientific-publication.com/images/PDF/2020/51/EUROPEAN-SCIENCE-2-51-II-A.pdf/ (дата обращения: 23.09.2020).
5. *Mirzayeva Sayyora Rustamovna.* Psychological features of attitudes of students to their own health in conflict situations. journal of critical reviews. ISSN- 2394-5125. Vol. 7. ISSUE 17, 2020. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.jcreview.com/?sec=cissue/ (дата обращения: 23.09.2020).
6. Ruziyeva Mohichehra Yokubovna. About color symbols in folklore. JCR. 2020; 7(17): 461-466 » Abstract » PDF» doi: 10.31838/jcr.07.17.64;
7. *Amonov Sultonovich Ulugmurod.* Abdurauf fitrat is one of the earliest researchers of Uzbek folklore. Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal, 2020, Volume 10, Issue: 6. P. 669-673. Online ISSN: 2249-7137. Article DOI: 10.5958/2249-7137.2020.00616.3.
8. *Makhmudova Darmonjon Bozorboevna*. Design as a means of aesthetic education. academicia: An International Multidisciplinary Research Journal, 2020. Vol. 10 Issue 9. P. 176-182. Online ISSN: 2249-7137. DOI: 10.5958/2249-7137.2020.01040.
9. *Тилавова М.М.* Приёмы формирования трудолюбия у младших школьников [The methods of forming diligence in younger schoolchildren] // II International scientific review of the problems of pedagogy and psychology (Boston, USA.22 May, 2018).

METHODOLOGICAL LITERACY AS A PART OF THE PROFESSIONAL COMPETENCE OF A FOREIGN LANGUAGE TEACHER

Yadgarova O.I. (Republic of Uzbekistan)
Email: Yadgarova573@scientifictext.ru

Yadgarova Ozoda Ibragimovna – doctoral Student,
SAMARKAND STATE INSTITUTE OF FOREIGN LANGUAGES,
SAMARKAND, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *achieving a new quality of education is impossible without increasing the level of professional competence of teachers. Knowledge acquired once in a lifetime at a university can no longer serve as a guarantee of professional success. The teacher's ability to navigate a huge information field, the ability to independently find solutions and successfully implement them, comes to the fore. This article examines the methodological literacy of a foreign language teacher, which manifests itself in the organization of the educational process, the choice of relevant educational and methodological complexes and authentic foreign textbooks. The author of the article focuses on the functions of a foreign language teacher in the classroom and emphasizes the need to master the terminology for teaching a foreign language.*
Keywords: *methodological literacy, foreign language, vocabulary and grammar.*

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ КАК ЧАСТЬ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ УЧИТЕЛЯ ИНОСТРАННОГО ЯЗЫКА

Ядгарова О.И. (Республика Узбекистан)

Ядгарова Озода Ибрагимовна – докторант,
Самаркандский государственный институт иностранных языков,
г. Самарканд, Республика Узбекистан

Аннотация: *достижение нового качества образования невозможно без повышения уровня профессиональной компетенции педагогов. Залогом профессионального успеха уже не могут служить полученные один раз в жизни в вузе знания. На первый план выходит способность учителя ориентироваться в огромном информационном поле, умение самостоятельно находить решения и их успешно реализовывать. В статье рассматривается методическая грамотность учителя иностранного языка, которая проявляется, в частности в организации образовательного процесса, выборе актуальных учебно-методических комплексов и аутентичных зарубежных пособий. Автор статьи акцентирует внимание на функциях учителя иностранного языка на уроке и подчеркивает о необходимости владения терминологией по методике преподавания иностранного языка.*
Ключевые слова: *методическая грамотность, иностранный язык, лексика и грамматика.*

The history of teaching foreign languages methodology abroad and in our country, the emergence of new teaching methods in modern schools are closely related to new trends in linguistics, psychology and pedagogy. Consideration of the methodology of teaching foreign languages as a pedagogical science would be incomplete if we did not reveal the question of the main object of this science - the subject "Foreign language". The principal difference between a language group of subjects and other subjects is that language knowledge is not important in itself, but only as a means of forming the ability to receive or communicate information through the language being studied. Native and foreign languages as academic subjects differ from other academic disciplines (basic sciences) not only their purposes to form communication skills. First of all, they act as a goal and as a learning tool [1].

Let us proceed to the consideration of those issues that are included in minimum set of professional competence of a foreign language teacher. Only a methodologically competent teacher can choose the right textbook that best suits his students. So, the choice of curriculum is the first and important step in further successful training. Nowadays, it is customary to talk not so much about a textbook as curriculum, and sometimes a complex. Let's try to figure it out. Curriculum is a minimal set, which, as a rule, includes a textbook, workbook, teacher's book and audio medium (disk). Curriculum is much broader in content. Consequently, in addition to the above, the complex may include multimedia products, Internet resources, books for reading, etc. When making a choice of a textbook, a teacher should pay attention to consistency and complexity. Consistency should be understood as the continuity of the use of a certain methodological system at the levels of education (primary, basic, secondary). The teacher should not forget also that the textbook or book for the student is the core of all teaching aids. The complexity of modern curriculum implies the maximum possible filling of the set with the additional sources to fulfill the subject content of the main educational program. Taking into account the level of training and the peculiarities of the stage of education, a methodologically competent teacher of a foreign language will choose for a textbook that will contain communicative material close to life's realities. It is especially important to pay attention, giving preference to one or another textbook, whether it contains exercises with foreign language phenomena that are absent in the native language or significantly different from the corresponding phenomena of the native language and can cause interlinguistic interference. You should also take into account the scientific nature of the content of the textbook, the selection of educational material for receptive and active assimilation, the speech orientation of tasks, the concentric and cyclical arrangement of educational materials. Exercises with all types of speech activity (listening, speaking, reading and writing), as well as aspects of the language (vocabulary and grammar) must be presented in the curriculum on a foreign language. A properly methodically oriented foreign language teacher will certainly introduce additional educational sources into the educational process. These include, first of all, textbooks of foreign publishing houses. These manuals are necessary for high-quality teaching of foreign language speech, and moreover, they are authentic. With the help of authentic materials, the teacher recreates the conditions of the language environment and real communication situations typical for a native speaker. By the way, the degree of authenticity of educational materials is a serious methodological problem. The use of authentic materials in the context of teaching foreign languages outside the linguistic environment is limited by the level of language proficiency of the students and the serious difficulties of the socio-cultural plan that students experience when working with them. Many phenomena of a sociocultural nature require additional explanation and interpretation. Unfortunately, the teacher of a foreign language does not always take into account the socio-cultural characteristics of authentic materials, which leads to the fact that students cannot cope with texts and communicative tasks in speech situations. The use of authentic materials in a foreign language lesson is necessary, but teachers must always be aware of the difficulties students face in working with them. When choosing curriculum, a foreign language teacher should remember the age of the learners and the degree of their motivation. The selection of scholarly manuals must be carried out taking into account a number of indicators, such as the goals and objectives of training, what methods and principles were laid down by the authors of these manuals. The next indicator of the methodological literacy of a foreign language teacher is the teacher's function in the classroom.

Function means the circle of activity of a foreign language teacher, his responsibilities and the role he assumes in the process of implementing pedagogical activity in the classroom. The following functions of a teacher are known in the domestic method: communicative-educational, controlling, gnostic, educating and developing [2].

Let us turn to one more component of the teacher's methodological literacy, which is "the degree of speech adaptability." The degree of speech adaptability of a teacher is a serious methodological problem. The speech adaptability of a teacher is expressed in the presence of such characteristic features as under-speed, frequent repetitions, long pauses, exaggerated pronunciation of certain words and phrases, use of simpler grammatical forms (short sentences, absence of complex syntactic constructions, etc.) and careful selection of vocabulary [3].

This article, of course, does not cover all the methodological problems of a foreign language teacher, and we did not set such a goal. They touched upon only the main, in our opinion, significant methodological issues of foreign language education.

References / Список литературы

1. *Kolesnikova I.L.* Anglo-Russian terminological reference book on methods of teaching foreign languages: a reference manual / I.L. Kolesnikova, O.A. Dolgina. M.: Bustard, 2008.
2. *Kuzmina N.V.* Methods of research of pedagogical activity / N.V. Kuzmina. L.: Publishing house of Leningrad State University, 1070.
3. *Chaudron C.* Second Language Classrooms: Research on Teaching and Learning. Cambridge: CUP, 1993.

DEVELOPMENT OF PROFESSIONAL COMPETENCE OF A TEACHER OF A PRESCHOOL EDUCATIONAL ORGANIZATION

Yuldasheva N.E. (Republic of Uzbekistan)
Email: Yuldasheva573@scientifictext.ru

Yuldasheva Nargiza Egamberdiyevna - Head of the Department,
DEPARTMENT OF PEDAGOGICAL PSYCHOLOGY,
FERGANA BRANCH
CENTER FOR SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL SUPPORT, RETRAINING AND ADVANCED TRAINING OF SPECIALISTS IN PHYSICAL CULTURE AND SPORTS
MINISTRY OF PHYSICAL CULTURE AND SPORTS OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN,
FERGANA, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *the article is devoted to the development of professional competence of a preschool educator. preschool educational institutions have an opportunity to develop professional competencies of educators through training and consulting support by specialists of vocational education institutions, in vocational education institutions - to increase the effectiveness of training future educators based on an analysis of the needs of preschool educational institutions of various types in professional competencies.*

Keywords: *competence, professional competence of a preschool teacher.*

РАЗВИТИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ ВОСПИТАТЕЛЯ ДОШКОЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Юлдашева Н.Э. (Республика Узбекистан)

Юлдашева Наргиза Эгамбердиевна - заведующая кафедрой,
кафедра педагогической психологии,
Ферганский филиал
Центр научно-методической поддержки, переподготовки и повышения квалификации специалистов по физической культуре и спорту
Министерство физической культуры и спорта Республики Узбекистан,
г. Фергана, Республика Узбекистан

Аннотация: *статья посвящена развитию профессиональной компетентности воспитателя дошкольной образовательной организации. У дошкольного образовательного учреждения появляется возможность развивать профессиональные компетенции воспитателей через обучающее и консультационное сопровождение специалистами*

учреждений профессионального образования, у учреждений профессионального образования - повысить эффективность подготовки будущих воспитателей на основе анализа потребностей дошкольных образовательных учреждений разных видов в профессиональных компетенциях.
Ключевые слова: *компетенция, профессиональные компетенции воспитателя дошкольного учреждения.*

Дошкольное образование - первая ступень образовательной системы. В последнее время вопросы дошкольного образования актуализируются в приоритетных направлениях государственной политики в сфере образования, что связано с увеличением численности неорганизованных детей дошкольного возраста, необходимостью удовлетворения образовательных потребностей детей разного уровня развития, и, как следствие, развитием видового разнообразия дошкольных образовательных учреждений (ДОУ) и обновлением требований к содержанию их деятельности. Условием реализации данных направлений становится организация инновационной деятельности воспитателей.

Направленность дошкольного образования на конечный педагогический результат - развитие ребенка и обеспечение его успешности на последующих ступенях обучения, предполагает высокий уровень профессиональной компетентности воспитателей ДОУ и формирующих ее компетенций. Нормативные требования к педагогической деятельности воспитателя ДОУ отражены в квалификационных характеристиках и документах образовательного учреждения. Базовое образование, полученное воспитателем, создает лишь предпосылки для формирования профессиональной компетентности, включающие обучение комплексу «деятельностей», необходимых для решения текущих образовательных и педагогических задач молодым специалистом в ДОУ. Развитие востребованных образовательной ситуацией профессиональных компетенций у воспитателей в связи с появлением новых форм дошкольного образования и видов ДОУ является тенденцией последнего десятилетия. Однако стандарты профессионального образования содержательно и технологически ориентированы в основном на подготовку будущих воспитателей к работе в ДОУ общеразвивающего вида и не всегда учитывают быстроменяющуюся ситуацию в дошкольном образовании (наращивание видового разнообразия ДОУ с учетом образовательных потребностей различных детей и уровня их развития).

Кроме того, в педагогической практике ДОУ отмечается отрицательная динамика в увеличении числа воспитателей без специального образования, чья профессиональная подготовка не отвечает современным потребностям дошкольного образования, и воспитателей с большим педагогическим стажем, имеющих, в своем большинстве, сложившиеся педагогические стереотипы деятельности. Современные же нормативные требования, определяемые системой дошкольного образования, задают перечень профессиональных компетенций, отличающихся содержательно от традиционно реализуемых воспитателями функций. Так, воспитатели профессионально действуют в стандартной образовательной ситуации, а в условиях развития сети разновидовых ДОУ оказываются не способными к реализации приоритетных направлений конкретного вида ДОУ У воспитателей разновидовых ДОУ появляются дефицитные компетенции, снижающие качество педагогического результата. В связи с этим развитие профессиональных компетенций воспитателей разновидовых ДОУ становится актуальным.

Основываясь требований государственного стандарта среднего профессионального образования, определены основные позиции в определении сущности профессиональных компетенций воспитателей разновидовых ДОУ:

1) профессиональные компетенции представляют собой обобщенные способы действий воспитателя, обеспечивающие продуктивное выполнение педагогической деятельности в условиях видового разнообразия ДОУ [2];

2) структура компетенции включает в себя: умения как основу компетенции; знания, обеспечивающие усвоение умения; ценностное и ответственное отношение к применению умения в педагогической деятельности, которое эффективно используется как в знакомых, так и

новых профессионально-педагогических ситуациях, а не на компетентность специалиста, трактуемая, как адекватное поведение педагога в образовательном учреждении [4];

3) содержание профессиональных компетенций выстраивается на основе функционального анализа педагогической деятельности воспитателя в условиях видового разнообразия ДОУ.

Учитывая, что под компетенцией понимается определенное профессиональное поведение при решении педагогических задач, каждой компетенции мы подобрали поведенческие признаки, которые можно зафиксировать в деятельности воспитателя ДОУ.

Таким образом, развитие профессиональных компетенций воспитателей разновидовых ДОУ - это непрерывный, разноуровневый процесс, состоящий из формирования перечня дефицитных компетенций воспитателей ДОУ, определения образовательных траекторий для воспитателей конкретного вида ДОУ, методического обеспечения повышения квалификации воспитателей ДОУ, организации профессионального обучения (на основе модульных программ) и оценки эффективности исполнения профессиональных компетенций в деятельности воспитателей. При этом источником целей и содержания повышения квалификации воспитателей ДОУ является противоречие между современными требованиями к дошкольному образованию, конкретным видом ДОУ и реальным уровнем профессиональных компетенций воспитателя [3].

Результативный компонент процесса повышения квалификации определен нами с двух позиций: во-первых, критерии эффективности связаны с результатами повышения квалификации, выражающимися в уровне профессиональных компетенций воспитателей и направленности на их дальнейшее развитие; во-вторых, критерии эффективности связаны с влиянием профессиональных компетенций воспитателей ДОУ на качество инновационных изменений в педагогической деятельности, способствующих созданию условий для оптимального развития детей дошкольного возраста с учетом уровня их развития и психофизиологических особенностей в условиях конкретного вида ДОУ.

Таким образом, у ДОУ появляется возможность развивать профессиональные компетенции воспитателей через обучающее и консультационное сопровождение специалистами учреждений профессионального образования, у учреждений профессионального образования - повысить эффективность подготовки будущих воспитателей на основе анализа потребностей ДОУ разных видов в профессиональных компетенциях.

Список литературы / References

1. *Renatovna A.G.* Psychological and pedagogical foundations for the development of critical thinking of students // ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal, 2020. Т. 10. № 4. С. 581-584.
2. *Акрамова С.Р.* Роль интерактивных технологий в развитии информационной компетенции учащихся // European research № 2 (60), 2020. С. 85-88.
3. *Makhmudova Darmonjon Bozorboevna.* Design as a means of aesthetic education. academicia: An International Multidisciplinary Research Journal, 2020. Vol. 10. Issue 9. P. 176-182. Online ISSN: 2249-7137. DOI: 10.5958/2249-7137.2020.01040.

TECHNOLOGY FOR MONITORING THE QUALITY OF THE EDUCATIONAL PROCESS IN THE ADVANCED TRAINING SYSTEM

Tashbaev N.S. (Republic of Uzbekistan)
Email: Tashbaev573@scientifictext.ru

Tashbaev Naim Sadukovich - Senior Lecturer,
DEPARTMENT OF PEDAGOGY AND PSYCHOLOGY,
INSTITUTE FOR RETRAINING AND ADVANCED TRAINING OF MANAGERS AND SPECIALISTS OF PRESCHOOL EDUCATIONAL INSTITUTIONS, TASHKENT, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *the article discusses the essence of monitoring the quality of course training of teachers in the system of advanced training and the conditions for its organization, identifies the main features of its technologization. The content of the concept of "educational service" in the system of advanced training has been determined. An educational service in the field of advanced training of teachers is a complex process aimed at the active transfer of knowledge, skills and abilities of a professional nature to teachers during the educational program, in order to meet personal, group and social needs in professional development, development of the intellectual potential of a person, organization of education , society.*
Keywords: *monitoring, quality, professional development of teaching staff.*

ТЕХНОЛОГИЯ МОНИТОРИНГА КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА В СИСТЕМЕ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Ташбаев Н.С. (Республика Узбекистан)

Ташбаев Наим Садыкович - старший преподаватель,
кафедра педагогики и психологии,
Институт переподготовки и повышения квалификации руководителей и специалистов дошкольных образовательных учреждений, г. Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *в статье рассматриваются сущность мониторинга качества курсовой подготовки педагогов в системе повышения квалификации и условия его организации, обозначены основные признаки его технологизации. Определено содержание понятия «образовательная услуга» в системе повышения квалификации. Образовательная услуга в сфере повышения квалификации педагогических работников — это комплексный процесс, направленный на деятельностную передачу педагогам знаний, умений и навыков профессионального характера в ходе образовательной программы, с целью удовлетворения личных, групповых и общественных потребностей в повышении квалификации, развития интеллектуального потенциала личности, организации образования, общества.*
Ключевые слова: *мониторинг, качества, повышения квалификации педагогических работников.*

Одним из основных компонентов структуры педагогического менеджмента является мониторинг как процесс получения и переработки информации о ходе и результате образовательной деятельности для принятия на этой основе определенного управленческого решения.

Мониторинг имеет ряд отличительных особенностей. Во-первых, он представляет собой целостную систему, реализующую множество функций (непрерывный сбор информации, ее структурирование, анализ, передача данных для использования в управлении и др.). Во-вторых, можно выделить следующие аспекты мониторинга, которые отличают его от других близких или похожих педагогических и психологических процессов:

- непрерывность (постоянный сбор данных);

- диагностичность (наличие модели или критериев, с которыми можно соотнести реальное состояние отслеживаемого объекта, системы или процесса) [4];
- проблемная ориентированность (включение в состав критериев отслеживания наиболее проблемных показателей и критериев, на основании которых можно делать выводы о недостатках в отслеживаемых процессах);
- технологичность критериев отслеживания (включение в критерии максимального количества информации при сохранении удобства их отслеживания);
- широкий спектр обнаружения изменений (возможность выявления необычных или нетипичных результатов);
- научность (научная обоснованность модели и отслеживаемых параметров);
- совершенствуемость (возможность внесения изменений в структуру мониторинга).

Итак, любая система управления качеством должна иметь адекватную поддержку посредством мониторинга как процесса сбора, обработки и передачи информации.

Образовательная услуга в сфере повышения квалификации педагогических работников — это комплексный процесс, направленный на деятельностную передачу педагогам знаний, умений и навыков профессионального характера в ходе образовательной программы, с целью удовлетворения личных, групповых и общественных потребностей в повышении квалификации, развития интеллектуального потенциала личности, организации образования, общества [1].

Цель мониторинга в системе повышения квалификации — содействие обеспечению качества образовательных услуг, предоставляемых педагогам регионов республика.

Признаки технологизации, которые отличают мониторинг качества повышения квалификации, выглядят следующим образом:

- разделение процесса на этапы, процедуры, операции;
- координация и последовательность действий, направленных на получение прогнозируемого результата;
- однозначность выполнения процедур и операций.

Образовательные потребности слушателей характеризуются следующими особенностями:

- предпочтение активных методов и тренинговых форм обучения;
- участие в выездных практических занятиях на базе образцовых организаций образования;
- приобретение в период курсовой подготовки информации об инновационном международном опыте в системе образования;
- осуществление взаимодействия с ИПК в сфере издательского дела;
- участие в работе сетевого сообщества.

Качественная организация образовательного процесса в системе повышения квалификации также предполагает возможность оперативного обмена информацией между всеми его участниками, предупреждение перегрузки, чёткое распределение функций между всеми субъектами. Организация курсов повышения квалификации, прежде всего, предполагает создание благоприятных условий для профессионального и личностного роста учителя в образовательной среде республиканского ИПК.

Список литературы / References

1. *Акрамова С.Р.* Роль интерактивных технологий в развитии информационной компетенции учащихся // European research. № 2 (60), 2020. С. 85-88.
2. *Kasimova Z.Kh.* PROFESSIONAL ORIENTATION OF COMMUNICATIVE COMPETENCE OF STUDENTS. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://scientific-publication.com/images/PDF/2020/51/EUROPEAN-SCIENCE-2-51-II-A.pdf/ (дата обращения: 23.09.2020).

3. *Mirzayeva Sayyora Rustamovna.* Psychological features of attitudes of students to their own health in conflict situations. journal of critical reviews. ISSN- 2394-5125. Vol 7. ISSUE 17, 2020. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.jcreview.com/?sec=cissue/ (дата обращения: 23.09.2020).
4. *Makhmudova Darmonjon Bozorboevna.* DESIGN AS A MEANS OF AESTHETIC EDUCATION. ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal Year: 2020, Vol. 10. Issue 9. P. 176-182. Online ISSN: 2249-7137. DOI: 10.5958/2249-7137.2020.01040.

USING INTERACTIVE TECHNOLOGIES IN TEACHING LISTENERS

Kholmatov E.S. (Republic of Uzbekistan)
Email: Kholmatov573@scientifictext.ru

Kholmatov Eler Sodikovich - Senior Lieutenant, Teacher-Methodologist,
EDUCATIONAL DEPARTMENT,
FERGANA TRAINING CENTER OF THE NATIONAL GUARD OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN,
FERGANA, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *this article discusses the use of interactive technologies in teaching students. Interactive learning assumes a logic of the educational process different from traditional education, in which learning proceeds not from the study of theoretical material to practice, but from the formation of a new information base to its theoretical comprehension. The experience and knowledge of all participants in interactive learning serves as a source of mutual learning. When participants in interactive learning share their knowledge and experience, they take on part of the teacher's functions, which increases their motivation in learning and contributes to its greater effectiveness.*
Keywords: *interactive, technology, training, listener.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБУЧЕНИИ СЛУШАТЕЛЕЙ

Холматов Э.С. (Республика Узбекистан)

Холматов Элер Содикович - старший лейтенант, педагог-методист,
учебный отдел,
Ферганскийучебный центр Национальной гвардии Республики Узбекистан,
г. Фергана. Республика Узбекистан

Аннотация: *в данной статье расмотрено использование интерактивных технологий в обучении слушателей. Интерактивное обучение предполагает отличную от традиционного образования логику образовательного процесса, при котором обучение происходит не от изучения теоретического материала к практике, а от формирования новой информационной базы к ее теоретическому осмыслению. Опыт и знания всех участников при интерактивном обучении служат источником их взаимного обучения. Когда участники интерактивного обучения делятся своими знаниями и опытом, то они берут на себя часть функций преподавателя, что повышает их мотивацию в обучении и способствует его большей эффективности.*
Ключевые слова: *интерактив, технология, обучения, слушатель.*

Понятие «интеракция» (от англ. *Interaction* – взаимодействие) возникло впервые в социологии и социальной психологии. Для теории символического интеракционизма (основоположник – американский философ Дж. Мид) характерно рассмотрение развития и жизнедеятельности личности, созидания человеком своего «Я» в ситуациях общения и взаимодействия с другими людьми. [2] В психологии интеракция – это процесс взаимодействия, диалога с чем- либо (например, с компьютером) или кем-либо (человеком).

Понятие *«*интерактивный*»* происходит от английского *«interact»* (*«inter»* – «взаимный», *«act»* – «действовать»).

Следовательно, *«*интерактивные методы*»* можно перевести как «методы, позволяющие слушателям взаимодействовать между собой».

*«*Интерактивное обучение*»* рассматривается как «способ познания, осуществляемый в формах совместной деятельности обучающихся» [3]. Это и есть сущность интерактивных методов, которая состоит в том, что обучение происходит во взаимодействии всех слушателей и преподавателя (рис. 1).

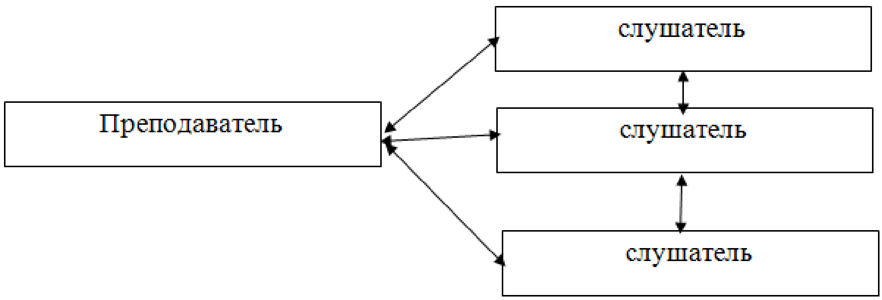

Рис. 1. Взаимодействие в процессе обучения

По сравнению с другими методами интерактивные ориентированы на более широкое взаимодействие слушатели не только с преподавателем, но и друг с другом и на доминирование активности слушатели в процессе обучения.

Активность преподавателя уступает место активности слушатели, а задачей преподавателя становится создание условий для их инициативы. Он регулирует учебно-воспитательный процесс и занимается его общей организацией, определяя общее направление (готовит заранее необходимые задания и формулирует вопросы или темы для обсуждения в группах), контролируя время и порядок выполнения намеченного плана работы, давая консультации, разъясняя сложные термины, помогая в случае серьезных затруднений.

К активным и интерактивным методам относят, таким образом, лишь те, которые строятся на психологических механизмах усиления влияния группы на процесс освоения каждым участником опыта взаимодействия и взаимообучения. [5] Такие методы являются инновационными образовательными технологиями.

Учебный процесс, опирающийся на использовании интерактивных методов обучения, организуется с учетом включенности в процесс познания всех слушатели группы без исключения. Совместная деятельность означает, что каждый вносит свой особый индивидуальный вклад, в ходе работы идет обмен знаниями, идеями, способами деятельности. Организуются индивидуальная, парная и групповая работа, используется проектная работа, ролевые игры, осуществляется работа с документами и различными источниками информации. Интерактивные методы основаны на принципах взаимодействия, активности обучаемых, опоре на групповой опыт, обязательной обратной связи. Создается среда образовательного общения, которая характеризуется открытостью, взаимодействием участников, равенством их аргументов, накоплением совместного знания, возможностью взаимной оценки и контроля.

Интерактивные методы обучения можно разделить на игровые и неигровые.

Игровые интерактивные методы обучения: деловая учебная игра, ролевая игра, психологический тренинг.

Неигровые интерактивные методы обучения: анализ конкретных ситуаций (case-study), групповые дискуссии, мозговой штурм, методы кооперативного обучения.

К числу активных и интерактивных методов обучения относится интерактивная лекция.

Интерактивная лекция объединяет в себе аспекты традиционной лекции и тренинговой игры. Этот формат лекции имеет смысл использовать в тех случаях, когда носителем уникальной информации являетесь Вы (или другой предметный эксперт) и когда ресурс времени и других информационных источников ограничен (проблемная лекция, лекция-консультация, лекция – пресс-конференция, лекция вдвоем, лекция-беседа, лекция-дисскусия, лекция-провокация, лекция-исследование, лекция-визуализация и др.).

Деловая игра имитирует различные аспекты человеческой активности и социального взаимодействия, снимает противоречия между абстрактным характером учебного предмета и реальным характером профессиональной деятельности. Ролевая игра используется для решения комплексных задач усвоения нового материала, закрепления и развития творческих способностей, а также для формирования общеучебных умений. Она дает возможность учащимся понять и изучить материал с различных позиций.

Интерактивные технологии помогают снять нервную нагрузку обучающегося, переключить его внимания, а так же в ходе занятия происходит постоянная смена форм обучения.

Интерактивное обучение предполагает отличную от традиционного образования логику образовательного процесса, при котором обучение происходит не от изучения теоретического материала к практике, а от формирования новой информационной базы к ее теоретическому осмыслению. Опыт и знания всех участников при интерактивном обучении служит источником их взаимного обучения. Когда участники интерактивного обучения делятся своими знаниями и опытом, то они берут на себя часть функций преподавателя, что повышает их мотивацию в обучении и способствует его большей эффективности.

Список литературы / References

1. *Akramova G.R., Akramova S.R.* Developing critical thinking on elementary class pupils is the most important factor for preparing social relationship. JOURNAL OF CRITICAL REVIEWS. ISSN- 2394-5125 VOL 7, ISSUE 17, 2020. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.jcreview.com/?sec=cissue/ (дата обращения: 23.09.2020).
2. *Акрамова Г.Р.* Modern approaches to the development of critical thinking of students. European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences. Vol. 7. № 11, 2019 ISSN 2056-5852.
3. *Renatova A.G*. Psychological and pedagogical foundations for the development of critical thinking of students // ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal, 2020. Т. 10. № 4. С. 581-584.
4. *Renatova A.S.* Interpretation of lexical and semantic features of uzbek-tajik words in jamal kamal's poem “Uzbek language. ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal Year: 2020, Volume: 10, Issue: 5. P. 1434-1440. Online ISSN: 2249-7137. Article DOI: 10.5958/2249-7137.2020.00342.0.
5. *Акрамова С.Р.* Роль интерактивных технологий в развитии информационной компетенции учащихся // European research. № 2 (60), 2020. С. 85-88.
6. *Ruziyeva Mohichehra Yokubovna.* About color symbols in folklore. JCR, 2020; 7 (17): 461-466. doi: 10.31838/jcr.07.17.64;
7. *Makhmudova Darmonjon Bozorboevna.* DESIGN AS A MEANS OF AESTHETIC EDUCATION. ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal Year: 2020, Vol. 10 Issue 9. P. 176-182. Online ISSN: 2249-7137. DOI: 10.5958/2249-7137.2020.01040.

INFORMATION AND METHODOLOGICAL SUPPORT OF PEO SPECIALISTS

Isakhodjaeva N.A. (Republic of Uzbekistan)
Email: Isakhodjaeva573@scientifictext.ru

Isakhodjaeva Nodira Akhmetovna - Senior Lecturer,
DEPARTMENT OF METHODOLOGY PRESCHOOL EDUCATION,
INSTITUTE OF RETRAINING AND ADVANCED TRAINING OF MANAGERS AND SPECIALISTS OF PRESCHOOL EDUCATIONAL INSTITUTIONS, TASHKENT, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

***Abstract**: the article reveals the relevance of the formation of professional competence of teachers and educators of preschool educational institutions (PEO). The concept of "professional competence" is revealed. The importance of specially organized information and methodological support of the process of forming professional competencies among PEO specialists is indicated. The principles of development and implementation of information and methodological support are described. The conclusion is made about the need for a more complete study of issues related to the construction of a system of information and methodological support for the formation of professional competencies of preschool teachers.*
***Keywords:** preschool educational organization, PEO, information and methodological support, professional competence, preschool specialist.*

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ СПЕЦИАЛИСТОВ ДОО

Исаходжаева Н.А. (Республика Узбекистан)

Исаходжаева Нодира Ахметовна – старший преподаватель,
кафедра методики дошкольного образования,
Институт переподготовки и повышения квалификации руководителей и специалистов дошкольных образовательных учреждений, г. Ташкент, Республика Узбекистан

***Аннотация:** в статье раскрывается актуальность формирования профессиональной компетентности педагогов и воспитателей дошкольных образовательных учреждений (ДОО). Раскрывается понятие «профессиональная компетентность». Указывается важность специально организованного информационно-методического сопровождения процесса формирования профессиональных компетенций у специалистов ДОО. Описаны принципы разработки и внедрения информационно-методического сопровождения. Делается вывод о необходимости более полного исследования вопросов, связанных с построением системы информационно-методического сопровождения формирования профессиональных компетенций педагогов ДОО.*
***Ключевые слова:** ДОО, дошкольная образовательная организация, информационно-методическое сопровождение, профессиональные компетенции, специалист ДОО.*

The quality of the educational process in a preschool educational organization (PEO) largely depends on the competence of teachers and educators. At the same time, pedagogical competence as an integrative personal resource [1] includes many practical aspects: a high level of knowledge, abilities and skills, work experience, the ability to implement the range of tasks facing a modern PEO specialist, which is reflected in the possession of information technology, effective interpersonal communication, empathy, the desire for professional development ... In this regard, the problem arises of creating conditions for the improvement and development of professional competencies of PEO specialists. We believe that specially organized information and methodological support with such a condition will allow preschool education specialists to more effectively master professional competencies both during periods of advanced training and in the course of professional activities directly in preschool educational institutions.

The relevance of formulating the problem of developing effective mechanisms for information and methodological support for the formation of professional competence of PEO specialists is the need to resolve the following set of contradictions between the importance of the formation of professional competencies as a process of growth of the professional potential of a teacher's personality and insufficient development of methodological work technologies focused on the formation of professional competencies of pedagogical workers in PEO.

The effectiveness of methodological support and support using modern information and communication technologies in the process of professional development of teachers has been proven by numerous studies [2, 3]. Organized information and methodological support allows you to create conditions for specialists to master the latest methods, principles of working with children and their parents, contributes to a more complete disclosure of the creative potential of teachers and educators, allows not only to accumulate, but also to disseminate the experience gained among colleagues. However, we still observe insufficient elaboration of the mechanisms of information and methodological support for the formation of professional competencies among PEO specialists. The organizational and managerial conditions and mechanisms for the construction and implementation of information and methodological support for the process of forming the professional competence of teachers and preschool educators still require study.

We believe that the development and implementation of information and methodological support in the process of forming the competencies of PEO specialists should be based on the following principles:

- Consistency and complexity;
- Differentiated approach to drawing up the educational trajectory of each PEO specialist;
- Scientific nature;
- Continuity - information and methodological support should be carried out constantly, both in the course of professional development and in direct work in the preschool educational institution;
- Measurability - the presence of an objective system evaluating the results of the formation of professional competencies;
- Orientation to practical activities.

Summing up, we conclude that pedagogical theory still requires a more complete study of aspects related to the construction of a system of information and methodological support for the formation of professional competencies of preschool teachers, based on the principles of network organization and the use of modern effective support mechanisms.

References / Список литературы

1. *Ramazanova E.A., Useinova A.A.* Methodological support for the development of professional competence of pedagogical staff of preschool educational institutions [Metodicheskoe soprovozhdenie razvitiya professional'noj kompetentnosti pedagogicheskih kadrov DOU] // Science and education today [Nauka i obrazovanie segodnya], 2020. № 6-1 (53).
2. *Olefir L.N.* On tutor support for teacher training in the information and methodological center [O t'yutorskom soprovozhdenii povysheniya kvalifikacii uchitelya v informacionno-metodicheskom centre] // Problems of modern pedagogical education [Problemy sovremennogo pedagogicheskogo obrazovaniya], 2019. № 64-1.
3. *Avvo B.V. and others.* Andragogical aspects of teacher training: information and methodological service "Profile of growth" [Andragogicheskie aspekty povysheniya kvalifikacii pedagogov: informacionno-metodicheskij servis" Profil' rosta"], 2019.

METHODOLOGY OF TEACHING STUDENTS IN HIGHER PEDAGOGICAL EDUCATION TO WORK PORTRAIT IN THE "GRIZAIL" METHOD OF PAINTING

Khudoynazarova O. (Republic of Uzbekistan)
Email: Khudoynazarova573@scientifictext.ru

Khudoynazarova Ogiloy – Lecturer,
DEPARTMENT OF FINE ARTS,
JIZZAKH STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE, JIZZAKH, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *this article gives data on how to perform works out in a systematic grouping utilizing the strategy of "Grizail", which could be a key step in educating understudies of academic colleges to work with representations.*
It is known that in image preparing it is vital to precisely reflect the color of the protest being drawn, to grant it a comparing color. This is often too a key component in head picture handling works out. To do this, you must to begin with ponder the haziness of the picture, discover and depict the features of the shape. In this case, you have got to perform works out within the Grizail technique. Since when this is often done, the volume of the head shape makes it simple to memorize to uncover it. In expansion, when handling a picture with a single color, it'll be conceivable to pay more consideration to the shape and estimate of the question (in still life), the head (in representation). Since the brightness of the color, the gloss is auxiliary. In this case, it is conceivable to make strides the procedure and strategies of utilizing the brush to a few degrees.
Keywords: *portrait, painting, Grizail, composition, methodical consistency.*

МЕТОДОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ ВЫСШЕГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ РАБОТЕ НАД ПОРТРЕТОМ В ТЕХНИКЕ ЖИВОПИСИ «ГРИЗЛИ»

Худойназарова О. (Республика Узбекистан)

Худойназарова Огилой – преподаватель,
кафедра изобразительных искусств,
Джиззакский государственный педагогический институт, г. Джиззак, Республика Узбекистан

Аннотация *в данной статье представлена информация о том, как выполнять упражнения в методической последовательности по методике «Гризли», которая является ключевым этапом в обучении студентов педагогических вузов работе с портретом. Известно, что при обработке изображений важно точно отразить цвет (тон) рисуемого объекта, придать ему соответствующий цвет. Это также ключевой элемент в упражнениях по обработке изображения головы. Для этого сначала необходимо научиться находить и описывать яркость изображения, свойства формы. В этом случае вам предстоит выполнять упражнения в технике гризли. При обработке изображения одним цветом можно будет больше внимания уделить форме и размеру объекта (в натюрмортах), голове (в портрете). Из-за яркости цвета и блеск вторичен. В этом случае можно в некоторой степени улучшить технику и приемы использования кисти.*
Ключевые слова: *портрет, живопись, техника Гризли, композиция, методическая выдержка.*

Working on a human image requires a part of information from the craftsman. Such necessities require the ponder of perusing, the collection of both hypothetical and down to earth encounter, the capacity to apply them in hone. Sometime recently working on a human head portrays, the understudy must have learned to carefully work still lives on different subjects. Something else it'll be troublesome to attain great comes about. The handling of a human head image can be isolated into a few stages within the shape of a fundamentally being with each other. They are:

- *Execution of the main image in the technique of "Grizail".*
- *Depiction of the head image in daylight environment.*
- *Display the artificially illuminated state of the head image.*
- *Depiction of the main painting in the open air in a "plein air".*

The study of the head image begins, as regular, with the "think about" of the impossible to miss characteristics of the individual being drawn. To do this, to begin with pencil drawings [1, 165], a few short-term depictions are performed. In a single color, frequently brown “mars” or dark combined with white, the picture decides the shape of the human head, the relationship of starvation, how it looks in connection to the foundation, the history of the most parts in it. After completing such subordinate work, it is advisable to begin the most assignment and move on to the preparing of a point by point picture. In a long-term picture, in any case, each detail is carefully considered and handled.

The use of a compliment brush when portray is done, permitting each level to be emblazoned in segments agreeing to its shape. Since the brush is utilized within the heading of the shape. Greases (smears) represent each piece [2, 119]. When preparing the head picture, genuine consideration ought to too be paid to its natural condition. Because everything around it contains a certain impact on his appearance. The foundation plays an especially vital part in uncovering the picture. Because the head being drawn is darker or darker than it looks within the "outline". Hence, it is superior to hone the set in two diverse positions, with a light and dull foundation.

In the event that the head is lit up straightforwardly or from the side of the picture, each portion (detail) in it'll appear bulging, and after that it'll be helpful to work it as an entire picture. When the shape-tone relationship is to begin with coordinates into the kag, the little pieces are moreover prepared in detail. In this case, of course, it is vital to pay consideration to the shadow-light, reflection (reflex), and to reenact it in its put. Light of the head with a counterfeit light source gives great comes about when performing the assignment "Grizail". When this can be done, the question being drawn will see clear, fresh. The estimate is well caught on. It is best to begin by appearing the shape of the head from its shadow area so that the picture can be prepared as a entirety. You'll be able at that point switch to semi-shadow reflexes. Once the foundation is completely created, at that point portraying the head is futile. It is superior to treat both similarly. This will make it simpler to show the picture as an entire. After finding the most "outline" of the head and expelling the shadows, it is conceivable to move on to the littler components, working on them to a few degree in detail.

After picking up encounter working with the portrait "Grizail", you'll be able do works out in color. In this case, all shades are utilized successfully. Within the case of perfect think about of color patterns, it is way better to perform the work out outside, within the open discuss, that’s, within the "plain discuss". The reality that the understudy continuously does such work as homework will increment his encounter.

Working on a human head portray is a critical portion of acing the "Grizail" strategy. It is known that picture handling, whether it is pencil or portray, is carried out in a conditional way in a scholastic way. In such an interconnected presence, the movement within the methodological arrangement serves as a calculate within the fruitful completion of the preparing task.

Working on the head portray, of course, starts with the improvement of a few assistant pencils, the choice of area, the ponder of the particular shape highlights of the head of the stone worker. Utilizing them viably, a pencil drawing of the head is drawn on the texture.

What the cast looks like in color can also be understood by developing several sub-colors [3, 55]. In this case, it’s shadow-light relationship, color properties, integrity, the ratio of color to the background (background) by determining the shape of the cat. It is with the help of this carefully prepared and carefully practiced pencil and colored paper that the main task — academic work — is accomplished in detail. Teaching students to work with portraits in the " Grizail " method of painting should be carried out in the following methodological stages:

1. Achieving integrity of the large shape of the light and shadow of the head and clothing parts relative to the background;
2. Study all the pieces of the form piece by piece and reflect in detail.

3. Generalization of the form, bringing the "constructive" aspects of the image's hue, color and structure to a unified state.

The first of the three steps mentioned above is easy to perform because it has been mastered a lot during the previous practical tasks. The next two stages will be studied as a result of future training. In the second stage, basically all the parts of the head that are considered to be muhigya are worked out in as much detail as possible, with a thorough analysis of the size and shape.

But the detail should not detract from the overall large shape and large color generalizations. One of the conditions that must be taken into account when processing the color and shape of each small element is its ratio to the large volume and the total color gamut.

The process of reflecting small parts of the head image, especially the eyes, eyebrows, nose, mouth, ears, etc., is a very delicate and labor-intensive work. When describing them, many things need to be solved with intelligence and experience. For example, some students may be able to express the eyes, eyebrows, nose, oris with lines, not paying much attention to the fact that they have their own shape, size. However, it is not difficult to notice that each shape has a bulging shade and the size is different from the color. To do this, they can be identified and compared by comparing their differences. At the same time it should not be forgotten to go to the differences in their color.

It is also important to find, accurately, and accurately describe the proportion of the head to the background, whether it is dark in color or dark in color. It requires the achievement of a holistic view of the overall appearance of each part of the head, despite the detailed processing. There are also cases where the student does not understand the shadows in the head image correctly and becomes very dark or hungry without working. Excessive exaggeration and brightening of the rays (reflexes) also undermines the overall color integrity. However, the reflected rays must be inside the shadow, within it. Excessive exaggeration of them will cause the shadow part to crumble.

At the stage of generalization of the work, special emphasis is placed on the fact that all the detailed and detailed parts are subject to the "fold form". In the words of the well-known Russian pedagogue-artist P. Chistyakov, "in the portrait, the eye must be consciously depicted with all precision, the nose and mouth must be more comfortable, and others can be generalized."

In conclusion, it should be noted that exercises should not be limited to classroom work only. Doing homework regularly and diligently is an important factor in enhancing a student’s experience.

References / Список литературы

1. *Baymetov B.B.* Qalamtasvir [Pencil drawing]. Oliy o’quv yurtlari uchun darslik [Textbook for students of higher educational institutions]. Tashkent: Musiqa, 2006 [in Uzbek].
2. *Beda G.V.* Zhivopis' [Painting]. Moscow: "Prosveshhenie", 1986 [in Russian].
3. Izobrazitel'noe iskusstvo [Fine arts]. (Pod redakciej A.A.Unkovskogo) (Edited by A.A. Unkovsky)]. Moscow: "Prosveshhenie", 1987.

ON THE QUESTION OF A PERSONALITY ORIENTED APPROACH TO LEARNING AND EDUCATION

Egamnazarov M.Yu. (Republic of Uzbekistan)
Email: Egamnazarov573@scientifictext.ru

Egamnazarov Murod Yusupovich – Teacher,
DEPARTMENT OF SPECIAL EDUCATION,
JIZZAKH STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE, JIZZAKH, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *this article examines the essence of the personality-oriented approach, discusses the understanding of the personal approach by various authors, reveals the features of interpretation in the psychological and pedagogical literature of the essence of the concept of "personality", its structure and individual substructures. An understanding of the concepts of "personality-oriented education" is given, which means the development, first of all, of those qualities of a personality that will help a person become the master of his life.*
Keywords: *personality-oriented approach, personality, personality structure, personality-oriented education.*

К ВОПРОСУ О ЛИЧНОСТНО ОРИЕНТИРОВАННОМ ПОДХОДЕ В ОБУЧЕНИИ И ОБРАЗОВАНИИ

Эгамназаров М.Ю. (Республика Узбекистан)

Эгамназаров Мурод Юсупович – преподаватель,
кафедра специального образования,
Джизакский государственный педагогический институт, г. Джизак, Республика Узбекистан

Аннотация: *в статье рассматривается сущность личностно ориентированного подхода. Обсуждается понимание личностного похода различными авторами, раскрываются особенности интерпретации в психолого-педагогической литературе сущности понятия «личность», ее структуры и отдельных подструктур. Приводится понимание понятия «личностно ориентированное образование», под которым понимается развитие, прежде всего, тех качеств личности, которые помогут человеку стать хозяином своей жизни.*
Ключевые слова: *личностно ориентированный подход, личность, структура личности, личностно ориентированное образование.*

The idea of the social, activity and creative essence of a person in the broad sense asserts a personal or personality-oriented approach in pedagogy. It means an orientation in the design and implementation of the pedagogical process on the person as a goal, subject, result and the main criterion of its effectiveness, requires recognition of the uniqueness of the person, his intellectual and moral freedom, the right to respect, thereby reflecting the main guideline of the humanistic paradigm. Within the framework of this approach, it is assumed that both teachers and students treat each person as an independent value, individuality, and not as a means to achieve their goals; this requires personalization of pedagogical interaction and adequate inclusion of personal experience in this process. The personal approach in the broad sense of the word assumes that all mental processes, properties and states are considered as belonging to a specific person, that they are “derivatives, depend on the individual and social life of a person and are determined by its laws” [1]. As S.L. Rubinstein emphasized, “in the mental form of the personality, various spheres, or features, characterizing different aspects of the personality are distinguished; but, for all its diversity, differences and contradictions, the main properties, interacting with each other in a specific human activity and interpenetrating each other, merge in the unity of the personality ”[2].

The main task of personality-oriented education is to create a student's knowledge of professional foundations as meaning for the formation of motives for learning, that is, the content of education includes emotional-value, personal elements that are determined by intersubjective relationships in the learning process. The essence of personality-oriented education lies in the fact that the forms, methods, relationships between teachers and students are built in such a way as to ensure the development of the personal components of the mental world of students, values, motives, attitudes, preferences on the following principles:

1) the person is in an active attitude to the world and to himself, the activity of the trainee acts in his creative manifestation;

2) the principle of naturalness, which allows to take into account the natural characteristics of the learner (physiological, psychological, anatomical, etc.) and, accordingly, its age characteristics. This principle provides for the organization of the educational process to rely on the natural properties of the student, for example, his curiosity, activity, ability. This approach focuses on the development of his emotional sphere, in particular interest, motivation to study the material, to stimulate a sense of satisfaction, a sense of success from a successfully carried out activity;

3) the principle of productivity aimed at productive creative activity, at creation of real learning products. This provides internal increments not only in the form of knowledge, skills and abilities, but also in terms of the spiritual development of the individual, as well as the formation of experience - both educational and cognitive, and socio-cultural, contributing to the socialization of the spiritual properties of the individual;

4) the principle of autonomy provides for an increase in the proportion of students' independence, the presence of elements of self and mutual learning [3]

5) In the traditional educational scheme, the student's subject is set by external goals that do not affect his motivation, and this educational model first connects the student with a vocation, and then motivated by the vocation, a subject is introduced specifically addressed to the student as different types of activities (lecture, seminar, lesson, practical lesson etc.) If the structure of traditional education was reduced to the "subject - teacher - student" scheme, then in this model the structure of the educational process became different: "student - vocation - subject - occupation - student".

The development of experience is based not on traditional teaching, but on dialogue, communication between the teacher and the learner, encouraging the latter, designing their life goals and plans.

Personal experience cannot be given in the form of programs and textbooks. It is introduced into the educational process thanks to the pedagogical skill of the teacher and special technologies that the teacher must master. The pedagogical technologies include joint activity of the participants of the educational process, dialogical approach in teaching when carrying out joint search of the meaning of the problem being studied, game approach when some conflict situation is modeled and requires independent decisions, performance of some social role, set approach when the studied material is presented as a vital task (problem), significant and solved in practical relation. The main idea of this technology is to create conditions for active joint learning activities of students in different learning situations. In such cases, if students are grouped in small groups (3-4 people each) and given one common task, stipulating the role of each group member in the task, then a situation arises in which everyone is responsible not only for the result of their work, but also for the result of the whole group. That is why the weak try to find out from the strong all the questions that they do not understand, and the strong are interested in that all the members of the group, first of all the weak, thoroughly understand the material, and at the same time the strong one has an opportunity to check his own understanding of the question. Thus, through joint efforts, gaps are closed, new knowledge is formed, and experience is gained in solving the problem. This teaching technology creates in the classroom a situation of demand for personal manifestations, independent judgments and assessments, decision-making by students. To use the presented technology, the teacher needs to represent his own personal potential, emotional and volitional capabilities, life experience, be able to create various situations by setting complicating tasks, problematic tasks, dialogue, educational and business games. The task of the teacher is not only to provide a system of knowledge, abilities, skills, but also in the process of forming this system to ensure that it is the result of the relationship between the perception of knowledge and the active work of the mind, the development of thinking, the ability to creatively operate with the acquired knowledge. An important condition of the classes is to create an environment where each student believes in his or her abilities, which requires a sufficient supply of knowledge to complete the task.

References / Список литературы

1. *Shorokhova E.V.* The psychological aspect of the personality problem // Theoretical problems of personality psychology. M., 1974. P. 26.
2. *Rubinstein S.L.* Fundamentals of General Psychology. SPb.: Peter, 2000. 712 p. (Series: "Masters of Psychology).
3. *Gurova T.F., Serikov V.V.* Personal orientation of modern educational technologies // Pedagogical technologies in improving the training of specialists for the internal affairs bodies. Volgograd, 1996. Pp. 4–7.

SYNTHESIS OF THE NEWEST RHYTHMOFORMULES AND NATIONAL IDENTITY OF RHYTHMICS IN THE MODERN SCENOGRAPHY OF UZBEKISTAN

Savchenko Ch.V. (Republic of Uzbekistan)
Email: Savchenko573@scientifictext.ru

Savchenko Christina Vladimirovna – Teacher,
DEPARTMENT OF VARIETY ART AND MASS PERFORMANCES,
STATE INSTITUTE OF ARTS AND CULTURE OF UZBEKISTAN,
Actress,
STATE ACADEMIC RUSSIAN DRAMA THEATER OF UZBEKISTAN,
TASHKENT, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract**:** *the article analyzes the features of the national rhythm of Uzbekistan, identifies the characteristic features of its differences from the West. The fundamental principles of the national rhythm are revealed, starting with the treatises of the thinkers of the East of the Middle Ages, who left the most important information about the understanding of sound, acoustics, modes and intervals, the development of music in accordance with the rhythm of poetry, rhythmic accentuation, durations, ways of complicating the rhythm and transition from one type to another. The structure of 11 rhythmic circles, created by the music theorist and poet Abdurrahman Jami, which constitute a kind of root, the basis of the foundations of the national rhythm, is examined in detail, a comparative analysis with modern circles of the rhythm of Uzbek musical art is carried out. It was revealed that the rhythm of art in Uzbekistan today is not a vicious circle, but a spatio-temporal sphere, which is always open to new trends and metamorphoses. The article examines specific director's concepts, experimental findings and methods, original stylistic solutions of modern directors in specific productions of the Uzbek theater.*
Keywords: *rhythm, tempo, energy, dynamics, message, movement, time, space, Central Asia, metamorphosis, rhythmic circles, aleotorics, rhythm formula.*

СИНТЕЗ НОВЕЙШИХ РИТМОФОРМУЛ И НАЦИОНАЛЬНОЙ САМОБЫТНОСТИ РИТМИКИ В СОВРЕМЕННОЙ СЦЕНОГРАФИИ УЗБЕКИСТАНА

Савченко К.В. (Республика Узбекистан)

Савченко Кристина Владимировна – преподаватель,
кафедра искусства эстрады и массовых представлений,
Государственный институт искусств и культуры Узбекистана,
актриса,
Государственный академический русский драматический театр Узбекистана
г. Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *в статье проанализированы особенности национальной ритмики Узбекистана, выявлены характерные черты ее отличия от западной. Выявлены первоосновы национального ритма, начиная с трактатов мыслителей Востока Средневековья, которые оставили важнейшие сведения о понимании звука, акустики, ладов и интервалов, развитии музыки в соответствии с ритмом поэзии, ритмической акцентировке, длительностях, способах усложнения ритма и перехода от одного вида к другому. Подробно рассмотрено строение 11 ритмических кругов, созданных теоретиком музыки и поэтом Абдуррахманом Джами, которые составляют своеобразный корень, основу основ национального ритма, проведён сравнительный анализ с современными кругами ритмики узбекского музыкального искусства.*

Выявлено, что ритм искусства Узбекистана сегодня - не замкнутый круг, а пространственно-временная сфера, которая всегда открыта новым тенденциям и метаморфозам. Исследованы конкретные режиссерские концепции, экспериментальные находки и методы, оригинальные стилистические решения современных режиссёров в конкретных постановках узбекского театра.
Ключевые слова: *ритм, темп, энергетика, динамика, посыл, движение, время, пространство, Центральная Азия, метаморфозы, ритмические круги, алеоторика, ритмоформула.*

Театр Узбекистана сегодня создаёт новую культурную парадигму. Рассматривая мир как плюралистический универсум, где взаимодействуют различные народы и традиции, многообразные ритмы, для театра Узбекистана — это способ осознать саму жизнь, в которой мы живем, и воссоздать её на сцене. Эта идея созвучна нынешнему этапу развития театральной мысли в Узбекистане и, вообще, общемировым тенденциям в сфере культуры и искусства. Апеллируя к наследию Востока, современные режиссёры обогащают образную систему народной музыки, развивают жанровую структуру, модифицируют стилистику и способы формообразования. Данный процесс органично сочетает две тенденции. С одной стороны, сохраняется наша национальная самоидентификация, что связано с использованием исконно восточных законов организации музыкальной целостности, так и материал, традиционные мелодии и напевы, западные композиторы создают новый музыкальный метаязык, определяющий будущее искусства.

Современная сцена - есть фронт ритмических действий. Именно время раскрывает образы памяти - архетипы, проливает свет на ритмическую структуру и объединяет тело с духом. Зритель призван общаться с актером посредством своих чувств и фантазий. И чем более актёры делают свою ритмическую энергию более насыщенной и постоянно ощущают ее подсознательно, тем более их тела становятся ядром энергии и мощным источником искусства. Тело становится полем битвы, сосудом для брожения и средством художественного выражения, что является настоящим ключом к воплощению самого ядра постановки. Рассмотрим генезис основ национального ритма, вернёмся к специфике, тенденциям и возможностям воссоздания исконно национального ритма на современной узбекской сцене.

В Центральной Азии существует своя многовековая интерпретация ритма и понимание ритмического содержимого. Ближний и Средний Восток в IX в. уже изобиловал философскими трудами и трактатами, которые по сей день являются ценным теоретическим наследием для национального ритма, в то время как в Европе учёные обратились к этой категории музыки значительно позже - в XII–XIII веках.

Аль–Фергани (около 798-861), разработавший специфические восточные ритмические фигуры и формулы, а также способы усложнения ритма и переход от одного вида к другим, по праву является основоположником теории музыки Востока.

Ибн-Сину (Авиценну, 980-1037) в «Книге исцеления», «Книге спасения», в разделах, посвященных музыке, интересовала, прежде всего, специфика ритма, как одного из видов художественной терапии многих телесных недугов. Ещё тогда он задумывался над уникальной способностью ритма эмоционально воздействовать на слушателя и даже излечивать психологические травмы, наподобие современного метода арт-терапии. Ибн-Сина давал ритму следующее определение: «Ритм-это сочетание ударов, отделённых определёнными промежутками времени» [1, с. 300].

Среднеазиатский мыслитель Аль-Фараби (871–950) в трактатах «О классификации ритма», «Большой трактат о музыке», «Музыкальные стили» рассматривал науку о музыке как математическую, и в то же время, отдавал предпочтение и эстетическим вопросам ритма и воздействия его на художественное восприятие человека. Он занимался всесторонним исследованием звука, акустики, ладов и интервалов, а также затрагивал проблемы развития музыки в соответствии с ритмом поэзии.

Из утверждений Аль-Фараби следовало, что «музыкальный период соответствует стиху, фраза – полустишию, мелодические члены фразы – частям полустишия. Эта наука опиралась на тождественность законов стихосложения законам ритма и законам ритма – законам музыки» [2, с.79].Таким образом, ритм в Центральной Азии считался связующим звеном между поэзией и музыкой. Стихосложение и музыка развивалась по арабской системе метрики, которая называлась «Аруз». Для первичной ритмической единицы, то есть, для произнесения слога, требуется определённое количество времени. Такое сложение ритма и метра является квантитативным, проще говоря, количественным. Близость к музыке наиболее характерна именно для этого квантитативного стихосложения, где слогу соответствует нота (как длительность и высота звука во времени).

Ритмические периоды выражались в виде определённых сочетаний слогов. Одни служили для обозначения ритмического сопровождения, другие – для обозначения ритма стихотворного текста.

Говоря о музыке Востока в Средневековье, следует отметить, что, ещё не подвергшись влиянию Запада, она была замкнутой и монодийной в звучании, однобокой и недоразвитой в плане гармонии, и ориентировалась, прежде всего, на слово, которое вело её за собой (своеобразная художественная напевная речь).

Абдуррахман Джами (1414 - 1492), поэт-мистик, теолог и теоретик музыки, единицу измерения длительности определяет следующим образом: «Всякая (временная) длительность, разделяющая две никре, может быть такой, что между этими двумя никре уже нет больше места для ещё одной никре в мелодическом ходе. Такая длительность ... является единицей всех других (образований из) никре» [3, с. 50].

Если переводить на музыкальный язык наших дней длительность «никре», то она аналогична современному музыкальному размеру 1/8 . «Никре» могла увеличиваться в несколько раз, кратной самой себе (четверть, половинная,) но первая длительность(восьмая) на практике встречается редко, так как «в силу её совпадения с никре, она находится вне соизмеримости» [3, с. 51].

Таким образом, именно Абдуррахман Джами тщательно разобрал «длительность» в арабской ритмической теории, кроме того, он является создателем около 11 ритмических кругов, которые он зафиксировал для обозначения музыкальной ритмики и размеров, дав им определённые четкие названия .Отследив структурные особенности ритмических основ Востока, мы можем отметить, что характерной чертой для восточного ритма является синкопированность. Равномерная и неравномерная переменность характерна для этих кругов. Так как в западной музыке синкопа чаще всего является нарушением ритмического порядка, очевидно характерное различие между музыкой Запада и Востока.

Ритмические круги характерны и для национального ритма музыки и поэзии Узбекистана. Это своеобразный корень, основа в теории кругов; они называются асль и фуруъ (что дословно переводится как «ветви», в ед.ч. - «ветвь»). Часть и целое в узбекском ритме-основа основ. Основной символический смысл-замкнутый круг (Концепция круга-как смыкание конца с началом), который в теории узбекского ритма проявляется на двух уровнях. «Рукн» (стопа), «асль» («основа, исход»), «джузв» («часть») «зарб» («соединение»), «бахр-стопа», «ибтида» («начало»), «махрадж» («корень»), «накорат» («соединение ритмических ударов») как части единого целого, это стопы музыкального и поэтического ритма – обозначаются терминами др. В отношении законченного круга, т.е. целого, наиболее часто используемыми являются «усуль», «джам» (система), «доира» (круг), подразумевающие некую «совокупность», и «бахр» (множественность).

Существует также условная формула для отсчета ритмических стоп «фоъил или афоъил-тафоъил», которая используется, в основном, в узбекской поэзии. «Бум бак бака бакко» - ещё одна формула, фиксированная, в основном, для ритма, исполняемого на ударных инструментах. Пристальное внимание в современных театрах Узбекистана стало уделяться постановке спектаклей, созданных по мотивам восточных произведений, которые отличаются монументальностью, условной метафоричностью формы и содержания, своей уникальной спецификой ритмического устройства. Интерес мировых режиссёров к Востоку неиссякаем; их обращение к ориентальным мотивам зарождает проникновение в театральный язык специфической интонации, ритмической организации, стилистических нюансов, и, наконец, создаёт новые оригинальные формы на стыке слияния мировых культур. Безусловно, проявляться ориентальный мотив должен не только в форме, но и в содержании постановки. Часто режиссёры пытаются вновь обратиться к истокам зрелищных форм драмы - к магическим ритуалам и «акустическим медитациям», действие похожим на церемонию.

Удачным экспериментом, который существует на сцене Узбекистане уже 10 лет (постановка 2010 года), стала постановка по мотивам суфийской поэмы Алишера Навои - «Семь лун» в Театре Марка Вайля «Ильхом», совместно с российской студией «SounDrama» В спектакле воссоединилась традиционная музыка Востока и динамичные ритмы Запада, образовав биполярный хаос двух энергий. Пластика восточного танца и сдержанность европейского жеста, еле заметная уловимость, элегантность офисных костюмов и пестрые цвета узбекских халатов, всё это можно рассматривать как единый фактор контраста ритма, который находится на стыке всех чувств восприятия, аналогичным синестезии.

Эксперименты над ритмическим содержанием и выход из «классического круга» - непростая задача с режиссёрской точки зрения, так она связана и с работой драматургов, но вынуждена, порой, принять отказ от трёх первооснов - места, времени, действия. Новый зритель требует новаторские решения, дабы воспринимать как исторические произведения, так и классику, современным взглядом, с обновлёнными ресурсами, соответствующим динамике и темпо-ритмом восприятия сегодняшнего дня.

В Государственном Академическом Русском Драматическом Театре Узбекистана, режиссёр-постановщик и театральный деятель Узбекистана - Бахтияр Хамидов зрелищно воплотил пять эскизов по мотивам «Хамсы «Алишера Навои» по своей собственной ритмоформуле. Слова на мелодичном «фарси» (оригинальные фрагменты текста из поэм на «фарси» в прочтении Народным артистом Узбекистана –Афзалом Азимовичем Рафиковым), музыка, исполняющаяся на исконно национальных инструментах (дойре, чанге, нагре, сато) и танец смешиваются в единый ритмический колорит Востока, который передаёт самую тонкую суть суфийской сверхзадачи самой «Пятерицы». Ритмоформула, которая является основным энергетическим «ядром» спектакля, чаще всего – лейтмотив в спектакле, который толкает его к событийному и действенному развитию. Именно ритм ведет спектакль и рассказывает события современным театральным языком, переводя его на языки всех шести чувств, сливающихся в сознании зрителя воедино.

Аналогичную формулу Б. Хамидов использовал в своей сценографии «Ревизора», разбавляя классическую постановку существованием на сцене Петрушки, русскими народными мотивами бродячих музыкантов и ряжеными, «обалаганив» беспорядочным ярмарочным ритмом классическое действо.

Режиссёры могут прибегнуть и к вещественной помощи предметов, (к примеру, нахождения на сцене старинных часов с поломанным механизмом вылета «кукушки, которые беспощадно отстукивают метрономом ушедшее время), чтобы создать определённый механизм, счётчик ритмического восприятия. Отсюда можно заключить, что материя ритма на сцене – это не только пространственно- временная сфера, но и символический мир предметных и вещественных показателей, имеющих свои физические и качественные свойства во времени, к примеру, текучесть.

Рассмотрим также ритмическую структуру постановки европейского режиссера Кемаля Султанова с ведущими актёрами театра Марка Вайля «Ильхом» в Узбекистане (2018 г.). Его «Антигону» смело можно назвать зрелищем-ритуалом, совмещающим вокально-хоровое действие, ритмический танец и отстранённую поэтическую декламацию, которая служит основными критериями выражения трагического духа. И постоянное соприкосновение с сырой землёй, как символ вечного времени в пространстве жизни и смерти. Режиссёр здесь столкнулся с определённой задачей - зафиксировать определённое время на сцене. Здесь мы можем заметить, что современный актер, работая над античной трагедией, также раскрывает с помощью себя время, ритм, развивает его материю, стремящуюся свернуться и ограничиться одной фразой и сформировать малую идею роли. Желая подчеркнуть, что настойчивая работа актера над медленным темпом в античной трагедии порождает разнообразные взрывы и промежуточные, непредвиденные времена с густой ритмической энергией. Мы убедились, что практикующие актёры, часто сталкиваются в своих исследованиях с такой фразой режиссёра «Медленное время имеет цель» [4, с. 51]. Этот метод работы над ритмом имеет перекрёстные аналоги с режиссёрской техникой выдающегося современного греческого театрального деятеля- Теодоруса Терзополуса, который в своих трудах открывает путь к ядру ритма античных постановок. Чаще всего, именно тело порождает время, которое в свою очередь рождает ритм, как носитель смыслов, чувств и образов. Время ритмически организует тело и порождает неожиданные косвенные телесные и языковые оси, слова-пули, тягучую песнь, совершенно деконструированный монолог, который может иметь иной смысл, дать обещание нового.

Кемаль Султанов также использует алеаторику — метод композиции, допускающий вариабельные отношения между элементами музыкальной ткани (в том числе — нотного текста) и музыкальной формы, а также свободная ритмическая импровизацию, в которой элементы композиции четко обусловлены алгоритмом существует как серия чистых констант, поток вибрирующей звуковой материи, калейдоскопа идей, знаков, ассоциаций.

Рассмотрим ещё один спектакль, поставленный на сцене ГАРДТУз Главным режиссёром - Валиханом Умаровым (2019 г.). Основой для спектакля "Одинокая лодка" стала драма народного писателя Узбекистана Эркина Агзама - "Танхо кайик, ёхуд девонанинг орзуси". Притча о высохшем море и опустошённых душах начинается с тревожно звонящего колокола и уходящей воды (которую на сцене воплощает светло голубое полотно), медленно утекающей со сцены. Песок, рассыпанный на сцене, который зачерпывает и пересыпает в ладонях главный герой, словно «песочные часы», как символ необратимости, звездное небо и звук колокола, режущий пространство настоящего на части - как символ вечности; всё это адекватное современному восприятию звукоизвлечение и визуальный ряд. Интересным решением стали выходы актрис в алых каракалпакских национальных нарядах под народные мотивы в начале, середине и конце спектакля, совершающие ритмические движения скорби вместе с утекающим «в никуда» морем. Единения статики с активным движением в полную величину, координацию звука и жеста, сочетание энергетической наполненности взгляда и глубокой моральной скорби и опустошённости душ;- всё это ведёт к момент-форме. Момент – форма особо характерна для принципа Востока и отражает восточную идею «все во всем». Речь идет о концепции времени, в котором прошлое, настоящее и будущее сливаются в одно мгновение.

Режиссёр осуществляет также метод ритмического контраста: переход от пустоты – к наполненности, от статичного безмолвия мизансцен - к движению, а порой, даже к неожиданным здесь эстрадным элементам хореографического номера (клип, который якобы снимают прямо на сцене). Тем не менее, режиссёры, создавая акцент на ритмической интонации, производя на сцене сплав музыки, слова и движения, прежде всего, должны стараться достичь эффекта, чтобы в сценографии не было отдельных вставок, выбивающихся из основного корпуса драмы. Интерес узбекской сценографии к музыкальному авангарду проявляется на уровне формообразования. Увлечение западной музыкой дает импульс к созданию новых ритмических форм сценографии: открытой формы, алеаторической формы, статической формы, момент-формы. Таким образом, именно в сфере ритмики проявляются признаки единичности, сингулярности каждой нации, чувственно выявляются особенности ментального и национального мышления. Тем не менее, мы убеждаемся, что ритмика в сценографии Узбекистана - это пространственно-временная сфера, которая всегда открыта новым тенденциям и трансформациям в искусстве, и представляет собой органичный сплав национально-самобытного, традиционного, новаторского, и индивидуально-авторского.

Список литературы / References

1. *Абу Али Ибн Сина (Авиценна).* Канон врачебной науки. Кн. 1. Ташкент, 1954. Цит. по: Джумаев А. Музыкально-эстетические взгляды Ибн Сины // Музыка народов Азии и Африки. М.: Советский композитор, 1984. С. 300-305.
2. *Векслер С.* Очерки истории узбекской музыкальной культуры / С. Векслер. Ташкент, 1965. С. 79.
3. *Джами А.* Трактат о музыке. / А. Джами. Ташкент, 1960. С. 51-53.
4. *Терзопулос Т.* Возвращение Диониса. Москва, 2014. С. 51-60.

PSYCHOLOGICAL SCIENCES

FORMING LEADERSHIP QUALITIES THROUGH THE DEVELOPMENT OF COMMUNICATION IN THE INDIVIDUAL

Ubaydullaev N.T. (Republic of Uzbekistan)
Email: Ubaydullaev573@scientifictext.ru

Ubaydullaev Nuriddin Tokhir ogli – PhD Student,
DEPARTMENT OF PSYCHOLOGY,
TASHKENT STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY, TASHKENT, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *in the field of psychology, there are a number of practical lessons on the formation of leadership qualities, which are reflected in practical exercises based on interactive teaching methods. The article examines the theoretical foundations of interpersonal communication and discusses ways of developing leadership qualities in a person.*
The science and practice of modern psychology recognize that it is difficult to study the activities of the individual in isolation from the social sphere. Emphasizing that information about personality psychology is given, it requires more attention to the study of socially existing laws of personality development.
Keywords: *personality, personality psychology, personality activities, communication, leadership, self-management, student personality, leadership qualities, training, master classes.*

ФОРМИРОВАНИЕ ЛИДЕРСКИХ КАЧЕСТВ НА ОСНОВЕ РАЗВИТИЯ КОММУНИКАЦИЙ В ЛИЧНОСТИ

Убайдуллаев Н.Т. (Республика Узбекистан)

Убайдуллаев Нуриддин Тохир огли – базовый докторант,
кафедра психологии,
Ташкентский государственный педагогический университет, г. Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *в области психологии существует ряд практических занятий по формированию лидерских качеств, которые находят отражение в практических упражнениях на основе интерактивных методов обучения. В статье рассматриваются теоретические основы межличностного общения и рассматриваются способы развития лидерских качеств в человеке.*
Наука и практика современной психологии признают, что трудно изучать деятельность человека в отрыве от социальной сферы. Подчеркивая, что информация о психологии личности дана, она требует большего внимания к изучению общественно существующих законов развития личности.
Ключевые слова: *личность, психология личности, личностная деятельность, общение, лидерство, самоуправление, личность студента, лидерские качества, обучение, мастер-классы.*

Consequently, the XXI century, which is the age of high information technologies, is also characterized by increasing attention to the human factor. After all, the desire to manage their own emotional experiences, to have a sincere healthy relationship with loved ones is growing day by day among ordinary citizens. One of the aspects that requires attention in this regard is the ability to treat, interact and express oneself to others. In addition, the main goal in the education of young people is the formation of leadership qualities in their social relations, thereby forming their leadership qualities [1, p. 81].

Communication is a necessary condition for human life and activity. It is through communication that people get the opportunity to master nature and work together to meet their individual needs. In the process of communication, certain images and models of human behavior are formed, and then they enter a person. A person's thinking, ability to analyze and evaluate the world and his image is formed in the process of communication.

Communication is a multifaceted process of developing connections between people, arising from the need to work together. The main reason why a person is called a product of social relations is that he is always in the circle of people, in the sphere of interaction with them, which indicates that one of the most leading and influential activities of a person is communication. In human relationships, it refers to the exchange of thoughts, feelings, worries, and joys that initially occur between people.

As people communicate, as the experience of the relationship between them increases, qualities such as commonality, similarity, and harmony emerge between them, they understand each other at a glance, and in some cases the intensity of such communication leads to the opposite reactions - a situation of tiredness from each other, the absence of speech.

Communicative activity is a state in which individuality, uniqueness, diversity of knowledge and imagination of each person are manifested, and thus it has attracted humanity for centuries. Therefore, the role and potential of the sciences in society, which deals with communication, its aspects, nature, techniques and strategies, teaching communication (social psychological training), has increased dramatically. Communication involves the exchange of information between collaborators, and such information exchange is defined as a communicative aspect of communication. When people engage in communication, they use language as one of its most important means.

The second aspect of communication is that the interlocutors exchange not only words but also actions during the speech process, which is called the interactive aspect of communication. Finally, the third aspect of communication is called perceptual, in which the interlocutors are able to perceive each other. Thus, in the process of communication it is possible to conditionally distinguish three aspects, namely, communicative (communication), interactive (interaction) and perceptual (mutual perception). The unity of these three aspects is manifested in the communication process as a way of organizing joint activities and joint actions of the people involved. According to the above definitions, communication can be broadly defined as follows: communication is a process of interaction of at least two people, during which information is exchanged, relationships are established, developed.

K.Yaspers, E. Fromm, M.S. Kagan's research shows the unity of the roots of interpersonal, intergroup, and interethnic relations in human and human life, showing that the destinies of the people of the world are interdependent, they believe that no individual, no life of any nation, no culture can remain or develop in isolation from others [2, p. 126].

L.S. Vygotsky also argues that the main weapon and means in interpersonal relationships is the process of dealing. According to him, in interpersonal relationships, first of all, communication is the main tool, and then the means of behavior. Because a person retains the function of behavior even when he is alone, it is also clear from the views of L.S. Vygotsky that behavior manifests itself in the forms of intereorization, i.e. internal speech, and externalization, i.e. external speech, behavior. It appears that the socialization of the individual occurs as a result of the treatment.

Research conducted under the direction of B.F Lomov revealed that the reason for strengthening the cognitive process of interpersonal communication and communication is that respondents exchange information, plan activities together and monitor each other during the tasks. According to V.N. Myasishchev's concept of "Psychology of personal relationships", the person is characterized by a "dialogic" nature, the product of personal experience of interaction and interaction with other people. As a result, a person has an inner force that drives him, such as the level of interest, emotional power, desire, need, social orientation, and this is reflected in his experiences, behavior, actions.

The analysis of V.N. Myasishchev's works on the psychology of interpersonal relations shows that the process of communication develops not only in the influence of personality traits, character, inclinations, abilities, but also in the mental processes of the participants in communication. Therefore, a special aspect of the work of V.N. Myasishchev is evident in the disclosure of the characteristics of the relationship between the mental processes of the participants in communication with its psychological structure. In the book "Social Psychology" G.M. Andreeva suggests the structure of 3 different tasks and complex processes that occur in interpersonal relationships as follows:

1. The communicative side of communication, i.e., as a process of interaction or exchange of information between interlocutors;
2. The interactive side of communication, i.e. as a process of influencing the behavior of the interlocutors;
3. The perceptual side of communication, that is, as a process in which the interlocutors perceive and understand each other [3, p. 229].

It should be noted that the development of communication in a person depends on the system of interpersonal relationships and the level of communication with others [4, p. 92]. In addition, the development of communication in them, in turn, can be determined by the composition of knowledge, skills and competencies about the environment, as well as the reserves of knowledge acquired in the educational process. The development of organizational and communication skills, especially during the student period, can be explained by the fact that they develop leadership qualities.

It should be noted that the nature of interpersonal relationships differs from the nature of social relations in its essence: - their necessary specificity - is the emotional (emotional) basis. Therefore, interpersonal relationships can be seen as a factor of the psychological "environment" of the group. The emotional basis of interpersonal relationships is an event that is born and concentrated on the basis of specific "emotions" that arise in people's relationships with each other. Thus, in order to form leadership qualities in a person, it is necessary to emphasize the methods and means of communication and their influence. Communication training, leadership training, and master classes are key to this. This is due to the fact that a person can also acquire initial leadership qualities through self-development methods. In addition, of course, trainings and master classes of specialists are effective means of influence.

References / Список литературы

1. *Karimova V., Hayitov O.* Shahsning izhtimoijlashuv muammosi [The problem of socialization of the individual]: Textbook. // Prof. Edited by V.M Karimova. Tashkent: TSPU, 2007 [in Uzbek].
2. *Sattorov E.N., Alimov H.* Boshqaruv muloqoti [Management dialogue]. Tashkent: Academy, 2003 [in Uzbek].
3. *Andreeva G.M.* Social'naja psihologija [Social Psychology]. Textbook. Moscow, 2003 [in Russian].
4. *Schwalbe B., Schwalbe Kh.* Lichnost'. Kar'era. Uspeh [Personality. Career. Success]. Moscow, 1993 [in Russian].

LXXIII INTERNATIONAL CORRESPONDENCE SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE

INTERNATIONAL SCIENTIFIC REVIEW OF THE PROBLEMS AND PROSPECTS OF MODERN SCIENCE AND EDUCATION

Boston. USA. September 22-23, 2020

HTTPS://SCIENTIFIC-CONFERENCE.COM

LIBRARY OF
CONGRESS (USA)

COLLECTION OF SCIENTIFIC ARTICLES
PUBLISHED BY ARRANGEMENT WITH THE AUTHORS

ISSN 2542-0798
INTERNATIONAL CONFERENCE

PRINTED IN THE UNITED STATES OF AMERICA

DISTRIBUTED FREE OF CHARGE