

**THE FOURTH DEGREE DIOPHANTINE EQUATION IN THREE VARIABLES**  
**Bokareva L.L.<sup>1</sup> (Republic of Kazakhstan), Bokarev N.L.<sup>2</sup> (Russian Federation)**  
**Email: Bokareva562@scientifictext.ru**

<sup>1</sup>Bokareva Lidia Leonidovna - Learner,  
MUNICIPAL GOVERNMENT INSTITUTION  
SCHOOL № 6 OF THE AKIMAT OF SHAKHTINSK, SHAKHTINSK, REPUBLIC OF KAZAKHSTAN;  
<sup>2</sup>Bokarev Nikita Leonidovich – Student,  
FACULTY OF ECONOMICS,  
FEDERAL STATE BUDGETARY EDUCATIONAL INSTITUTION OF HIGHER PROFESSIONAL EDUCATION  
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY, NOVOSIBIRSK

**Abstract:** in this paper, a special case of the Fermat equation and some fourth-degree equations in three variables is considered. A general formula for finding all solutions of an indefinite fourth-degree equation with three variables  $x^4 + y^2 = z^2$ , where  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , that is, a formula that allows finding all right-angled triangles, one of the legs of which is an exact square of a natural number, has been found. The use of arithmetic functions allowed us to write the solutions found in the form of a single formula.

**Keywords:** diophantine equation, the fourth degree equation in three variables.

**ДИОФАНТОВО УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЁРТОЙ СТЕПЕНИ ОТ ТРЁХ ПЕРЕМЕННЫХ**

**Бокарева Л.Л.<sup>1</sup> (Республика Казахстан), Бокарев Н.Л.<sup>2</sup> (Российская Федерация)**

<sup>1</sup>Бокарева Лидия Леонидовна - учащаяся,  
Коммунальное государственное учреждение  
Общеобразовательная школа № 6 акимата г. Шахтинска, г. Шахтинск, Республика Казахстан;  
<sup>2</sup>Бокарев Никита Леонидович – студент,  
экономический факультет,

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, г. Новосибирск

**Аннотация:** в работе рассмотрен частный случай уравнения Ферма и некоторые уравнения четвёртой степени от трёх переменных, найдена общая формула нахождения всех решений неопределённого уравнения четвёртой степени с тремя переменными  $x^4 + y^2 = z^2$ , где  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , то есть формулу, которая позволяет найти все прямоугольные треугольники, один из катетов которых является точным квадратом натурального числа. Использование арифметических функций позволило записать найденные решения в виде единой формулы.

**Ключевые слова:** диофантово уравнение, уравнения четвёртой степени от трёх переменных.

Рассмотрим уравнение

$$x^4 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

где  $x, y, z \in \mathbb{N}$ .

Перепишем уравнение (1) следующим образом:

$$x^4 = (z + y)(z - y) \quad (2)$$

и пусть

$$x = px_1, y = py_1, z = pz_1, \quad (3)$$

где  $(x_1, y_1, z_1) = 1$  [1, с. 56-60]. Тогда уравнение (3) примет вид

$$p^2 x_1^4 = (z_1 + y_1)(z_1 - y_1) \quad (4)$$

Пусть также

$$z_1 + y_1 = a, z_1 - y_1 = b, \quad (5)$$

откуда

$$z_1 = \frac{a+b}{2}, y_1 = \frac{a-b}{2} \quad (6)$$

где  $(a, b) = 1$ , тогда равенство (4) запишется:

$$p^2 x_1^4 = ab. \quad (7)$$

Покажем, что  $(a, b) \leq 2$ . Так как  $(x_1, y_1, z_1) = 1$ , то  $(y_1, z_1) = 1$ , что весьма несложно проверить. Пусть  $(a, b) = d$ , тогда

$$a = d a_1, b = d b_1,$$

где  $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ ,  $(a_1, b_1) = 1$  и, поэтому,  $a_1$  и  $b_1$  не могут быть одновременно чётными. Таким образом, из выражений (6) следует,

$$\text{что } z_1 = \frac{d}{2}(a_1 + b_1), y_1 = \frac{d}{2}(a_1 - b_1).$$

$$\text{Имеем } (z_1, y_1) = \frac{d}{2}(a_1 + b_1, a_1 - b_1),$$

$$\text{откуда } (a_1 + b_1, a_1 - b_1) = \frac{2}{d}. \quad (8)$$

Как видно из выражения (8), или  $d = 1$  ( $a_1$  и  $b_1$  – оба нечётные), или  $d = 2$  ( $a_1$  и  $b_1$  – разной чётности).  
Итак,

$$(a_i, b_i) \leq 2. \quad (9)$$

Рассмотрим уравнение (7) при условии (9). Очевидно, что  $p^2 \mid (ab)$ , следовательно, можно записать

$$a_1 = a' \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2, b_1 = b' \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2, \quad (10)$$

где  $p_i, a', b' \in \mathbb{N}$  ( $i = \overline{1, r}$ ),  $(a', b') \leq 2$ . Подставив выражение (31) в равенство (7) получим:

$$x_i^4 = a' \cdot b', \quad (11)$$

где  $a', b' \in \mathbb{N}$ ,  $(a', b') \leq 2$ . Рассмотрим отдельно два случая  $(a', b') = 1$  и  $(a', b') = 2$ .

1) Пусть  $(a', b') = 1$ . Тогда из уравнения (11) следует, что

$$a' = m^4, b' = n^4, \quad (12)$$

где  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $(m, n) = 1$ . В этом случае, вспомнив условия (2) и (5), получим следующую формулу:

$$x = p m n, y = p \frac{m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 - n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2}{2}, z = \frac{m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 + n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2}{2},$$

где  $p, m, n \in \mathbb{N}$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $m^2 \cdot \prod_{i=1}^s p_i > n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i$ ,  $p$  – свободное от квадратов число. Поскольку  $y, z \in \mathbb{N}$  имеем формулу:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2p m n}{(2, m \cdot \prod_{i=1}^s p_i + n \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i)}, \\ y &= 2p \frac{m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 - n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2}{(2, m \cdot \prod_{i=1}^s p_i + n \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i)^2}, \\ z &= 2p \frac{m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 + n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2}{(2, m \cdot \prod_{i=1}^s p_i + n \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

где  $p, m, n \in \mathbb{N}$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $m^2 \cdot \prod_{i=1}^s p_i > n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i$ ,  $p$  – свободное от квадратов число.

В справедливости формулы (13) легко убедиться, подставив её в уравнение (1). Полагая фиксированными натуральными числами, отвечающими условиям, наложенным на них, получим частные решения уравнения (1). Например,  $p = 2, m = n = 1$ :  $\langle 2, 3, 5 \rangle$ ;  $p = 1, m = 2, n = 1$ :  $\langle 4, 30, 34 \rangle$  и так далее.

2) Пусть теперь  $(a', b') = 2$ . Тогда

$$a' = 2a'', b' = 2b'' \quad (14)$$

где  $(a'', b'') = 1$  и, следовательно, уравнение (7) примет вид

$$x_i^4 = 4 \cdot a'' \cdot b'',$$

где  $a'', b'' \in \mathbb{N}$ ,  $(a'', b'') = 1$ . Очевидно, что  $x$  должно делиться на 2, то есть,  $x_1 = 2x_2$ , а, значит,  $4x_2^4 = a'' \cdot b''$ . Таким образом, или  $4 \mid a''$ , или  $4 \mid b''$ . В первом случае,  $a'' = 4m^4, b'' = n^4$ , то есть,  $x_2 = mn, x_1 = 2mn$ . Вспомнив выражения (14), (11), (6), (1), получим формулу

$$\begin{aligned} x &= 2p m n, y = p \left( 4m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 - n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2 \right), \\ z &= p (4m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 + n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2) \end{aligned} \quad (15)$$

где  $p, m, n \in \mathbb{N}$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $n$  – нечётно (так как  $(a'', b'') = (4m^4, n^4) = 1$ ),  $2m^2 \prod_{i=1}^s p_i > n^2 \prod_{i=s+1}^r p_i$ . Если же  $4 \mid b''$ , то по аналогии получим:

$$\begin{aligned} x &= 2p m n, y = p \left( m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 - 4n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2 \right), \\ z &= p (m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 + 4n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2) \end{aligned} \quad (16)$$

где  $p, m, n \in \mathbb{N}$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $m$  – нечётно (так как  $(a'', b'') = (m^4, 4n^4) = 1$ ),  $m^2 \prod_{i=1}^s p_i > 2n^2 \prod_{i=s+1}^r p_i$ .

Формулы (36) и (37) можно объединить в единую формулу [2]

$$\begin{aligned} x &= \frac{2p m n}{(2, n)}, y = p \frac{4m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 - n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2}{(2, n)^2}, \\ z &= p \frac{4m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 + n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2}{(2, n)^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $p, m, n \in \mathbb{N}$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $p = \prod_{i=1}^r p_i$  ( $p_i = p_j$  тогда и только тогда, когда  $i = j$ ),  $2m^2 \prod_{i=1}^s p_i > n^2 \prod_{i=s+1}^r p_i$

Полагая в формуле (17)  $p, m, n$  конкретными натуральными числами, отвечающими условиям, наложенным на них, получим частные решения уравнения (1). Например,  $p = m = n = 1$ :  $\langle 2, 3, 5 \rangle$  и так далее.

Видно, что при некоторых параметрах формулы (13) и (17) могут давать одинаковые частные решения уравнения. Можно показать, что формула (17) является частным случаем формулы (13).

Действительно, положим в формуле (13)  $p = 2p'$ , тогда в этой формуле  $(2, 2m \prod_{i=1}^s p_i + n \prod_{i=s+1}^r p_i) = (2, 2m + n) = (2, n)$  и, следовательно, формула (34) примет вид [3]:

$$x = \frac{2p'mn}{(2, n)}, y = p' \cdot \frac{4m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 - n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2}{(2, n)^2},$$

$$z = p' \cdot \frac{4m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 + n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2}{(2, n)^2}, \quad (18)$$

где  $p', m, n \in \mathbb{N}$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $p' = \prod_{i=1}^r p_i$  ( $p_i = p_j$  тогда и только тогда, когда  $i = j$ ),  $2m^2 \prod_{i=1}^s p_i > n^2 \prod_{i=s+1}^r p_i$ . Если в формуле (17) положить, что  $p$  – нечётное число, тождественность формул (17) и (18) очевидна.

$$x = \frac{2p'(2m)n}{(2, n)}, y = 2p' \cdot \frac{((2m)^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 - n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2)}{(2, n)^2},$$

$$z = 2p' \cdot \frac{((2m)^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 + n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2)}{(2, n)^2},$$

или

$$x = \frac{2p'm(2n)}{(2, n)}, y = 2p' \cdot \frac{(4m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 - (2n)^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2)}{(2, n)^2},$$

$$z = 2p' \cdot \frac{(m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 + (2n)^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2)}{(2, n)^2},$$

где  $p, m, n \in \mathbb{N}$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $p = \prod_{i=1}^r p_i$  ( $p_i = p_j$  тогда и только тогда, когда  $i = j$ ). Несложно показать, что обе формулы являются частным случаем формулы (13), достаточно положить в формуле (13)  $p$  – нечётным числом и, в первом случае,  $m = 2m_1$ , во втором –  $n = 2n$ . Таким образом, формула (17) является частным случаем формулы (13).

Итак, все решения уравнения (1) можно записать в виде единой формулы:

$$x = \frac{2p'mn}{(2, p)(2, m \cdot \prod_{i=1}^s p_i + n \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i)},$$

$$y = 2p \frac{m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 - n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2}{(2, p)^2 (2, m \cdot \prod_{i=1}^s p_i + n \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i)^2}, \quad (19)$$

$$z = 2p \frac{m^4 \cdot \prod_{i=1}^s p_i^2 + n^4 \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i^2}{(2, p)^2 (2, m \cdot \prod_{i=1}^s p_i + n \cdot \prod_{i=s+1}^r p_i)^2},$$

где  $p, m, n \in \mathbb{N}$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $m^2 \prod_{i=1}^s p_i > n^2 \prod_{i=s+1}^r p_i$ ,  $p$  – свободное от квадратов число.

При фиксированных натуральных числах  $m$  и  $n$  можно найти частные решения. Например, варьируя параметры в формуле (19), получим частные решения уравнения (1), некоторые из которых приведены в таблице ниже:

Таблица 1. Частные решения уравнения (1)

$p$	$m$	$n$	$x$	$y$	$z$	$x^4 + y^2 = z^2$
1	1	1	2	3	5	$2^4 + 3^2 = 5^2$
2	1	1	4	30	34	$4^4 + 30^2 = 34^2$
3	1	1	3	12	15	$3^4 + 12^2 = 15^2$
5	1	1	10	495	505	$10^4 + 495^2 = 505^2$
6	1	1	12	192	240	$12^4 + 192^2 = 240^2$

### Список литературы / References

1. Бокарев Н.Л. Некоторые классические диофантовы уравнения / Н.Л. Бокарев, Е.В. Буякова. [Электронный ресурс]. Научно-методический электронный журнал «Концепт», 2014. Т. 26. С. 56–60. Режим доступа: <https://e-koncept.ru/author/4048/> (дата обращения: 25.07.2019).
2. Бокарев Н.Л. Диофантовы уравнения второй степени от трёх переменных / Н.Л. Бокарев, Е.В. Буякова. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/v/diofantovy-uravneniya-vtoroy-stepeni-ot-tryoh-peremennyh/> (дата обращения: 25.07.2019).

3. *Кожегельдинов С.Ш.* О задачах, связанных с пифагоровыми тройками // Межвузовская конференция, посвящённая 150-летию со дня рождения Абая. / С.Ш. Кожегельдинов. Семей: СГУ имени Шакарима, 1991. С. 132–133.