METOD GALERKIN FOR THE INITIAL- BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LINEAR NONSTATIONARY QUASI OPTICS EQUATION WITH A SPECIAL GRADIENT TERMS

Farzaliyeva U.M. (Republic of Azerbaijan) Email: Farzaliyeva57@scientifictext.ru

Farzaliyeva Ulker Mirsamid - Teacher, Doctoral Student,
DEPARTMENT MATHEMATICS AND INFORMATICS,
LANKARAN STATE UNIVERSITY, LANKARAN, REPUBLIC OF AZERBAIJAN

Abstract: *the article deals with the secondary initial-boundary value problems for the linear nonstasionary quasi optics equation with a special gradient terms. The correctness problem for the statement of the considered boundary value problems is investigated and the existence and uniqueness theorems for its solution are proved. It is indicated that the existence and uniqueness of a weak generalized solution and almost everywhere a solution using the Galerkin method. The study of the solvability of the initial-boundary value problem for a nonstationary quasi-optics equation with a special gradient term and with measurable bounded coefficients is of great importance.*
Keywords: *initial-boundary value problems, nonstasionary quasi optics equation, correctness problem, Galerkin method, wave function.*

МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КВАЗИОПТИКИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ СЛАГАЕМЫМ

Фарзалиева У.М. (Азербайджанская Республика)

Фарзалиева Улькер Мирсамид кызы - преподаватель, докторант,
кафедра математики и информатики,
Ленкоранский государственный университет, г. Ленкорань, Азербайджанская Республика

Аннотация: *в работе для доказательства разрешимости первой начально-краевой задачи для линейного нестационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым с измеримыми ограниченными коэффициентами был использован метод Галеркина. Метод Галеркина используется в начально-краевой задаче в случае, когда коэффициенты уравнения зависят одновременно от пространственных переменных x и от времени t. Установлено существование и единственность слабого обобщенного решения и почти всюду решения с помощью метода Галеркина. Установлено, что изучение вопроса разрешимости начально-краевой задачи для нестационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым и с измеримыми ограниченными коэффициентами имеет большое значение.*
Ключевые слова: *первой начально-краевой задачи, нестационарного уравнения квазиоптики, существования, единственности, метода Галеркина.*

Введение

В данной работе рассматривается вопрос разрешимости начально-краевой задачи для линейного нестационарного уравнения квазиоптики, со специальным градиентным слагаемым которые часто возникают в нелинейной оптике при изучении распространения светового пучка в неоднородной среде, когда частицы являются заряженными и волновая функция или комплексная амплитуда электрического поля световой волны зависит от пространственной и временной переменных [1]. Следует отметить, что вопрос разрешимости начально-краевой задачи для линейного нестационарного уравнения квазиоптики без специального градиентного слагаемого и с измеримыми ограниченными коэффициентами ранее исследован в работах [13, 14] и установлено существование и единственность слабого обобщенного решения и почти всюду решения с помощью метода Галеркина. Приближенное решение по методу Галеркина будем искать в виде $\psi^N(x,t,z)$. Изучение вопроса разрешимости начально-краевой задачи для нестационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым и с измеримыми ограниченными коэффициентами имеет большое значение.

1. Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу об определении функции $\psi = \psi(x,t,z)$ в области Ω из условий:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + ia_0\frac{\partial\psi}{\partial z} - a_1\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + ia_2(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} + a(x)\psi + v_0(x,t,z)\psi + iv_1(x,t,z)\psi = f(x,t,z),\ (x,t,z)\in\Omega \quad (1),$$

$$\psi(x,0,z)=\varphi_0(x,z),\ (x,z)\in\Omega_L, \qquad (2)$$
$$\psi(x,t,0)=\varphi_1(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T, \qquad (3)$$
$$\psi(0,t,z)=\psi(l,t,z)=0, (t,z)\in Q, \qquad (4)$$

где $i=\sqrt{-1}$ - мнимая единица, $a_0>0, a_1>0$ - заданные числа, $a(x),\ v_0(x,t,z), v_1(x,t,z)$ - заданные измеримые вещественнозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$0\le a(x)\le \mu_0,\ \forall x\in\overset{o}{(0,l)},\ \mu_0=const>0; \qquad (5)$$

$$|a_2(x)|\le \mu_1,\ \left|\frac{da_2(x)}{dx}\right|\le \mu_2,\ \forall x\in\overset{o}{(0,l)},\ \mu_1,\mu_2=const>0; \qquad (6)$$

$$|v_0(x,t,z)|\le b_0, \left|\frac{\partial v_0(x,t,z)}{\partial t}\right|\le b_1, \left|\frac{\partial v_0(x,t,z)}{\partial z}\right|\le b_2, \overset{0}{\forall}(x,t,z)\in\Omega,;\ b_m=const>0,\ m=0,1,2, \quad (7)$$

$$|v_1(x,t,z)|\le d_0, \left|\frac{\partial v_1(x,t,z)}{\partial t}\right|\le d_1, \left|\frac{\partial v_1(x,t,z)}{\partial z}\right|\le d_2, \overset{0}{\forall}(x,t,z)\in\Omega,;\ d_m=const>0,\ m=0,1,2; \quad (8)$$

$\varphi_0(x,z),\ \varphi_1(x,t),\ f(x,t,z)$-заданные измеримые комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_0\in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L),\ \varphi_1\in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T),\ f\in W_2^{0,1,1}(\Omega). \qquad (9)$$

Ясно, что задача об определении $\psi=\psi(x,t,z)$ из условий (1)-(4) является первой начально-краевой задачей для уравнения квазиоптики (1). Под решением этой задачи понимается функция $\psi=\psi(x,t,z)$ из пространства $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$, удовлетворяющая условиям (1)-(4) для почти всех $(x,t,z)\in\Omega$, то есть удовлетворяющая уравнению $\overset{0}{\forall}(x,t,z)\in\Omega$, условиям (2), (3) для $\overset{0}{\forall}(x,z)\in\Omega_L, \overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega_T$, соответственно и краевым условиям (4) для $\overset{0}{\forall}(t,z)\in Q$. Такое решение будем называть почти всюду решением задачи (1)-(4).

2. Исследование существование и единственность почти всюду решения с **помощью метода Галеркина**

Теорема 1. Пусть функции $a(x), v_0(x,t,z), v_1(x,t,z)$, $\varphi_0(x,z),\ \varphi_1(x,t),\ f(x,t,z)$ удовлетворяют условиям (5)-(9). Тогда начально-краевая задача (1)-(4) имеет единственное решение из $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)}\le c_0\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)}+\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right), \qquad (10)$$

где $c_0>0$ постоянная не зависит от φ_0, φ_1 и f.

Приближенное решение по методу Галеркина будем искать в виде:

$$\psi^N(x,t,z)=\sum_{k=1}^{N}c_k^N(t,z)u_k(x), \qquad (11)$$

где $c_k^N(t,z)=(\psi^N(\cdot,t,z),u_k)_{L_2(0,l)},\ k=\overline{1,N}$ определяются из условий:

Лемма 1. Для галеркинских приближений вида (1) справедлива оценка:

$$\|\psi^N\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)}\le c_0\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)}+\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right),\ N=1,2,\dots . \qquad (12)$$

Доказательство леммы: Каждое k –ое уравнение системы (2) умножим на свое $\bar{c}_k^N(t,z)$ и полученные равенства просуммируем по k от $k=1$ до $k=N$. Тогда, полученное равенство интегрируя по области $Q_{tz}=(0,t)\times(0,z)$ и используя формулу интегрирования по частям, имеем:

$$\int_{\Omega_{tz}}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\bar{\psi}^N+ia_0\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\bar{\psi}^N+a_1\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2+ia_2(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\bar{\psi}^N+a(x)\left|\psi^N\right|^2+\right.$$

$$\left.+v_0(x,t,z)\left|\psi^N\right|^2+iv_1(x,t,z)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau d\theta=\int_{\Omega_{tz}}f\bar{\psi}^N dxd\tau d\theta,\forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L].$$

Из этого равенства, вычитывая его комплексное сопряжение и добавляя к обеим частям слагаемое $\int_{\Omega_{ея}}\frac{da_2(x)}{dx}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau d\theta$, а также учитывая условия для функции $u_k(0)=u_k(l)=0, k=1,2,\ldots$, можем получить справедливость неравенства:

$$\left\|\psi^N(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_z)}+a_0\left\|\psi^N(\cdot,\cdot,z)\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\le\le\left\|\psi^N(\cdot,0,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_z)}+a_0\left\|\psi^N(\cdot,\cdot,0)\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}$$

$$+(1+2d_0+\mu_2)\int_{\Omega_{tz}}\left|\psi^N\right|^2dxd\tau d\theta+\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\qquad(13)$$

для $\forall t\in[0,T], \forall z\in[0,L]$. С помощью формулы (1) и условий (2), (3) имеем

$$\left\|\psi^N(\cdot,0,z)\right\|^2_{L_2(0,l)}=\sum_{k=1}^N\left|c_k^N(0,z)\right|^2=\sum_{k=1}^N\left|\varphi_{0k}(z)\right|^2,\qquad(14)$$

$$\left\|\psi^N(\cdot,t,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}=\sum_{k=1}^N\left|c_k^N(t,0)\right|^2=\sum_{k=1}^N\left|\varphi_{1k}(t)\right|^2.\qquad(15)$$

После интегрирования равенства (4) по z по интервалу $(0,L)$, а равенства (5) по t по интервалу $(0,T)$, нетрудно установить справедливость неравенств:

$$\left\|\psi^N(\cdot,0,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}\le\left\|\varphi_0\right\|^2_{L_2(\Omega_L)},\ (16)$$

$$\left\|\psi^N(\cdot,\cdot,0)\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}\le\left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}.\qquad(17)$$

С помощью этих неравенств и леммы Гроноулла из (3) получим следующую оценку

$$\left\|\psi^N(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}+\left\|\psi^N(\cdot,\cdot,z)\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}\le c_1\left(\left\|\varphi_0\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}+\left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}+\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right),$$

$$\forall t\in[0,T], \forall z\in[0,L],\qquad(18)$$

где $c_1>0$ постоянная не зависит от N,φ_0,φ_1 и f.

Теперь получим оценку для $\frac{\partial\psi^N}{\partial t}$ и $\frac{\partial\psi^N}{\partial z}$. С этой целью обе части системы (12) продифференцируем по t и полученное каждое k –ое уравнение умножим на свое $\frac{\partial\bar{c}_k^N(t,z)}{\partial t}$ и все полученные равенства просуммируем по k от $k=1$ до $k=N$. Тогда, полученное равенство проинтегрируя по области Q_{tz} и произведя интегрирование по частям с использованием условий $u_k(0)=u_k(l)=0,\ k=1,2,\ldots,$ имеем:

$$\int_{\Omega_{tz}}\left(i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}+ia_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial z\partial t}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}+a_1\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x\partial t}\right|^2+ia_2(x)\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x\partial t}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}+a(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\right.$$

$$+\frac{\partial v_0(x,\tau,\theta)}{\partial t}\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+i\frac{\partial v_1(x,\tau,\theta)}{\partial t}\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+v_0(x,\tau,\theta)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+$$

$$\left.+iv_1(x,\tau,\theta)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2\right)dxd\tau d\theta=\int_{\Omega_{tz}}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau d\theta,\forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L].$$

Вычитывая из этого равенства его комплексное сопряжение и добавляя к обеим частям полученного равенства слагаемое $\int_{\Omega_{ея}}\frac{da_2(x)}{dx}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau d\theta$ и в полученном равенства применяя неравенство Коши-Буняковского, а также используя условия $u_k(0)=u_k(l)=0, k=1,2,...$ и условия на коэффициенты уравнения, получим следующее неравенство:

$$\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,t,\theta)}{\partial t}\right|^2dxd\theta+a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,z)}{\partial t}\right|^2dxd\tau\le$$

$$\le\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,0,\theta)}{\partial t}\right|^2dxd\theta+a_0\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,0)}{\partial t}\right|^2dxd\tau+$$

$$+(b_1+d_1)\int_{\Omega_{tz}}\left|\psi^N\right|^2dxd\tau d\theta+(1+2d_0+\mu_2+b_1+d_1)\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau d\theta+\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2dxd\tau d\theta \qquad (19)$$

для $\forall t\in[0,T],\ \forall z\in[0,L]$. В силу формулы:

$$\frac{\partial\psi^N(x,t,0)}{\partial t}=\sum_{k=1}^N\frac{\partial c_k^N(t,0)}{\partial t}u_k(x)=\sum_{k=1}^N\frac{d\varphi_{1k}(t)}{dt}u_k(x) \qquad (20)$$

можем установить справедливость неравенства:

$$\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,0)}{\partial t}\right|^2dxd\tau\le\left\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \qquad (21)$$

Для оценки первого слагаемого правой части неравенства (19) умножим каждое k –ое уравнение системы (12) при $t=0$ на свое $\frac{\partial\overline{c}_k^N(0,z)}{\partial t}$ и полученные равенства просуммируем по k от $k=1$ до $k=N$. Полученное равенство интегрируя по интервалу $(0,L)$ и применяя неравенство Коши-Буняковского, получим справедливость неравенства:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,0,\cdot)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}\le\int_{\Omega_L}\left|\left(ia_0\frac{\partial\psi^N(x,0,z)}{\partial z}+L\psi^N(x,0,z)+ia_2(x)\frac{\partial\psi^N(x,0,z)}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+v_0(x,0,z)\psi^N(x,0,z)+iv_1(x,0,z)\psi^N(x,0,z)-f(x,0,z)\right)\right|^2dxdz. \qquad (22)$$

В силу формулы:

$$\frac{\partial\psi^N(x,0,z)}{\partial z}=\sum_{k=1}^N\frac{\partial c_k^N(0,z)}{\partial z}u_k(x)=\sum_{k=1}^N\frac{d\varphi_{0k}(z)}{dz}u_k(x) \qquad (23)$$

можем установить справедливость неравенства:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,0,\cdot)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}\le\left\|\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}. \qquad (24)$$

Кроме того, в силу формулы (11)при $t=0$ имеем:

$$\frac{\partial\psi^N(x,0,z)}{\partial x}=\sum_{k=1}^N c_k^N(0,z)\frac{du_k}{dx}=\sum_{k=1}^N\varphi_{0k}(z)\frac{du_k(x)}{dx}\text{. Т} \qquad (25)$$

Отсюда можем установить справедливость неравенства:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,0.)}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega_L)} \le c_2 \|\varphi_0\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega_L)} \qquad (26)$$

С помощью этого неравенства и (14), а также следующих неравенств:

$$\left\| L\psi^N(\cdot,0,\cdot) \right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \le c_3 \|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega_L)}, \qquad (27)$$

$$\| f(\cdot,t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega_L)} \le c_4 \left(\int_0^T \| f(\cdot,t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega_L)} dt + \int_0^T \left\| \frac{\partial f(\cdot,t,\cdot)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega_L)} dt \right), \ \forall t \in [0,T] \qquad (28)$$

из неравенства (12)при условиях на коэффициенты уравнения имеем:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot,0,\cdot)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \le c_5 \left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \| f\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right), \qquad (29)$$

где $c_5 > 0$ постоянная не зависит от N. С учетом неравенства:

$$\int_{\Omega_z} \left| \frac{\partial \psi^N(x,0,\theta)}{\partial t} \right|^2 dx d\theta \le \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot,0,\cdot)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \qquad (30)$$

и оценок (21), (29) из (19) получим справедливость неравенства:

$$\int_{\Omega_z} \left| \frac{\partial \psi^N(x,t,\theta)}{\partial t} \right|^2 dx d\theta + a_0 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N(x,\tau,z)}{\partial t} \right|^2 dx d\tau \le$$

$$\le c_6 \left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega_T)} + \| f\|^2_{W_2^{0,1,0}(\Omega)} \right) + \int_{\Omega_{tz}} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau d\theta, \ \forall t \in [0,T], \forall z \in [0,L], \qquad (31)$$

где $c_6 > 0$ -постоянная не зависит от N. Из этого неравенства с помощью леммы Гронуолла получим справедливость оценки:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot,t,\cdot)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega_L)} \le c_7 \left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega_T)} + \| f\|^2_{W_2^{0,1,0}(\Omega)} \right), \ \forall t \in [0,T], \qquad (32)$$

где $c_7 > 0$ постоянная не зависит от φ_0, φ_1, f и N. С помощью этой оценки из неравенства (31) имеем:

$$\int_{\Omega_z} \left| \frac{\partial \psi^N(x,t,\theta)}{\partial t} \right|^2 dx d\theta + \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N(x,\tau,z)}{\partial t} \right|^2 dx d\tau \le$$

$$\le c_8 \left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega_T)} + \| f\|^2_{W_2^{0,1,0}(\Omega)} \right) \ \forall t \in [0,T], \forall z \in [0,L], \qquad (33)$$

где $c_8 > 0$ постоянная не зависит от N.

Для оценки $\dfrac{\partial \psi^N}{\partial z}$ опять будем использовать систему (12). Продифференцируем по z обе части системы (12) и каждое k –ое уравнение полученной системы умножим на свое $\dfrac{\partial \bar{c}_k^N(t,z)}{\partial z}$. Тогда, полученные равенства суммируя по k от $k=1$ до $k=N$ и интегрируя по области Q_{tz}, получим справедливость равенства:

$$\int_{\Omega_{tz}} \left(i \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial z} \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial z} + i a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial z^2} \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial z} + a_1 \left| \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x \partial z} \right|^2 + i a_2(x) \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x \partial z} \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial z} + a(x) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial z} \right|^2 + \right.$$

$$+\frac{\partial v_0(x,\tau,\theta)}{\partial z}\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+i\frac{\partial v_1(x,\tau,\theta)}{\partial z}\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+v_0(x,\tau,\theta)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2+$$

$$\left.+iv_1(x,\tau,\theta)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2\right]dxd\tau d\theta=\int\limits_{\Omega_{tz}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}\right)dxd\tau d\theta,\forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L].$$

Вычитывая из этого равенства его комплексное сопряжениеидействуя как и в получении неравенства (19) и используя условия на коэффициенты уравнения, получим справедливость неравенства:

$$\int\limits_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,t,\theta)}{\partial z}\right|^2dxd\theta+a_0\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,z)}{\partial z}\right|^2dxd\tau\le$$

$$\le\int\limits_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,0,\theta)}{\partial z}\right|^2dxd\theta+a_0\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,0)}{\partial z}\right|^2dxd\tau+$$

$$+(b_2+d_2)\int\limits_{\Omega_{tz}}\left|\psi^N\right|^2dxd\tau d\theta+(1+2d_0+\mu_2+b_2+d_2)\int\limits_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2dxd\tau d\theta+\int\limits_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2dxd\tau d\theta,$$

$\forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L]$.

Далее действуя аналогично, как при получении оценок (32), (33) из неравенства (19), из последнего неравенства можем установить справедливость оценок:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,\cdot,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}\le c_9\left(\|\varphi_0\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega_L)}+\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)}+\|f\|^2_{W_2^{0,0,1}(\Omega)}\right),\ \forall z\in[0,L],\tag{34}$$

$$\int\limits_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N(x,t,\theta)}{\partial z}\right|^2dxd\theta+a_0\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau,z)}{\partial z}\right|^2dxd\tau\le$$

$$\le c_{10}\left(\|\varphi_0\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega_L)}+\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)}+\|f\|^2_{W_2^{0,0,1}(\Omega)}\right)\ \forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L],\tag{35}$$

где $c_9>0,\ c_{10}>0$ -постоянные не зависят от N.

Теперь для оценки $L\psi^N$ сначала оценим $\frac{\partial\psi^N}{\partial x}$. С этой целью каждое k –ое уравнение системы (27) умножим на свое $\frac{\partial\overline{c}_k^N(t,z)}{\partial t}+a_0\frac{\partial\overline{c}_k^N(t,z)}{\partial z}$ и все полученные равенства просуммируем по k от $k=1$ до $k=N$. Тогда в полученном равенстве применяя формулу интегрирования по частям, имеем:

$$\int\limits_{\Omega_{tz}}\left(i\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}+a_0\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2+a_1\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial t\partial x}+a_0a_1\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial z\partial x}+\right.$$

$$+ia_2(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+ia_0a_2(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+$$

$$+a(x)\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+a_0a(x)\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+v_0(x,\tau,\theta)\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+a_0v_0(x,\tau,\theta)\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+$$

$$\left.+iv_1(x,\tau,\theta)\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+ia_0v_1(x,\tau,\theta)\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}\right)dxd\tau d\theta=\int\limits_{\Omega_{tz}}f\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+a_0\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}\right)dxd\tau d\theta,$$

$\forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L]$.

Это равенство суммируя с его комплексным сопряжением, получим справедливость равенства:

$$\int\limits_{\Omega_{tz}} a_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2\right) dx d\tau d\theta + \int\limits_{\Omega_{tz}} a_0 a_1 \frac{\partial}{\partial z}\left(\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2\right) dx d\tau d\theta -$$

$$-2\int\limits_{\Omega_{tz}} a_2(x) \operatorname{Im}\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right) dx d\tau d\theta - 2\int\limits_{\Omega_{tz}} a_0 a_2(x) \operatorname{Im}\left(\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial z}\right) dx d\tau d\theta +$$

$$+2\int\limits_{\Omega_{tz}} a(x) \operatorname{Re}\left(\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right) dx d\tau d\theta + 2\int\limits_{\Omega_{tz}} a_0 a(x) \operatorname{Re}\left(\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial z}\right) dx d\tau d\theta +$$

$$+2\int\limits_{\Omega_{tz}} v_0(x,\tau,\theta) \operatorname{Re}\left(\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right) dx d\tau d\theta + 2\int\limits_{\Omega_{tz}} a_0 v_0(x,\tau,\theta) \operatorname{Re}\left(\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial z}\right) dx d\tau d\theta -$$

$$-2\int\limits_{\Omega_{tz}} v_1(x,\tau,\theta) \operatorname{Im}\left(\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right) dx d\tau d\theta - 2\int\limits_{\Omega_{tz}} a_0 v_1(x,\tau,\theta) \operatorname{Im}\left(\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial z}\right) dx d\tau d\theta =$$

$$= 2\int\limits_{\Omega_{tz}} \operatorname{Re}\left(f \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right) dx d\tau d\theta + 2\int\limits_{\Omega_{tz}} a_0 \operatorname{Im}\left(f \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial z}\right) dx d\tau d\theta, \ \forall t \in [0,T], \forall z \in [0,L].$$

Отсюда с учетом условия на коэффициенты уравнения нетрудно получить следующее неравенство:

$$a_1 \left\|\frac{\partial \psi^N(.,t,.)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_z)} + a_0 a_1 \left\|\frac{\partial \psi^N(.,.,z)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} \le a_1 \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0,.)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_z)} + a_0 a_1$$

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} +$$

$$+2\mu_1 \int\limits_{\Omega_{tz}} \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right| dx d\tau d\theta + 2a_0\mu_1 \int\limits_{\Omega_{tz}} \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial z}\right| dx d\tau d\theta +$$

$$+2\mu_0 \int\limits_{\Omega_{tz}} |\psi^N| \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right| dx d\tau d\theta + 2a_0\mu_0 \int\limits_{\Omega_{tz}} |\psi^N| \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial z}\right| dx d\tau d\theta +$$

$$+2\int\limits_{\Omega_{tz}} |v_0(x,\tau,\theta)||\psi^N| \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right| dx d\tau d\theta + 2a_0 \int\limits_{\Omega_{tz}} |v_0(x,\tau,\theta)||\psi^N| \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial z}\right| dx d\tau d\theta +$$

$$+2\int\limits_{\Omega_{tz}} |v_1(x,\tau,\theta)||\psi^N| \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right| dx d\tau d\theta + 2a_0 \int\limits_{\Omega_{tz}} |v_1(x,\tau,\theta)||\psi^N| \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial z}\right| dx d\tau d\theta +$$

$$+2\int\limits_{\Omega_{tz}} |f| \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right| dx d\tau d\theta + 2a_0 \int\limits_{\Omega_{tz}} |f| \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial z}\right| dx d\tau d\theta, \ \forall t \in [0,T], \forall z \in [0,L].$$

Из этого неравенства с применением неравенства Коши-Буняковского получим справедливость неравенства:

$$a_1 \left\|\frac{\partial \psi^N(.,t,.)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_z)} + a_0 a_1 \left\|\frac{\partial \psi^N(.,.,z)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} \le a_1 \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0,.)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_z)} + a_0 a_1$$

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} +$$

$$+(1+a_0)(\mu_0 + b_0 + d_0)\int\limits_{\Omega_{tz}} |\psi^N|^2 dx d\tau d\theta + (1+\mu_0+\mu_1 + b_0 + d_0)\int\limits_{\Omega_{tz}} \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dx d\tau d\theta +$$

$$+a_0\left(1+\mu_0+\mu_1+b_0+d_0\right)\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2 dxd\tau d\theta+2\int_{\Omega_{tz}}|f|^2 dxd\tau d\theta+$$

$$+\left(1+a_0\right)\mu_1\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2 dxd\tau d\theta,\ \forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L].$$

В силу формулы (11) при $t=0$ и $z=0$ и оценок (20), (32), (34) из последнего неравенства получим:

$$a_1\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t,.)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_z)}+a_0a_1\left\|\frac{\partial\psi^N(.,.,z)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\le$$

$$\le c_{11}\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)}+\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right)+\left(1+a_0\right)\mu_1\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2 dxd\tau d\theta,$$

$$\forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L]. \qquad (36)$$

Из этого неравенства нетрудно получить справедливость неравенства:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t,.)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_z)}+\left\|\frac{\partial\psi^N(.,.,z)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\le$$

$$\le c_{12}\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)}+\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right)+c_{13}\int_{\Omega_{tz}}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 dxd\tau d\theta,\ \forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L] \quad (37)$$

Отсюда с дважды применением леммы Гроноулла получим справедливость оценки:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t,.)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}+\left\|\frac{\partial\psi^N(.,.,z)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_T)}\le c_{14}\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)}+\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right), \quad (38)$$

для $\forall t\in[0,T],\forall z\in[0,L]$, где $c_{14}>0$ -постоянная не зависит от N.

Теперь оценим $L\psi^N$. С этой целью каждое k –ое уравнение системы (12) умножим на свое $\lambda_k\bar{c}_k^N(t,z)$ и все полученные равенства просуммируем по k от $k=1$ до $k=N$. Тогда, в полученном равенстве применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем:

$$\left\|L\psi^N(\cdot,t,z)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le\int_D\left|-i\frac{\partial\psi^N(x,t,z)}{\partial t}-ia_0\frac{\partial\psi^N(x,t,z)}{\partial z}-ia_2(x)\frac{\partial\psi^N(x,t,z)}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-v_0(x,t,z)\psi^N(x,t,z)-iv_1(x,t,z)\psi^N(x,t,z)+f(x,t,z)\right|^2dx. \qquad (39)$$

Интегрируя это неравенство по z по интервалу $(0,L)$, получим справедливость неравенства:

$$\left\|L\psi^N(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}\le 6\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,t,\cdot)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}+6a_0^2\left\|\frac{\partial\psi^N(\cdot,t,\cdot)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}+6\mu_1^2\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t,.)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}+$$

$$+5\int_{\Omega_L}\left|v_0(x,t,z)\right|^2\left|\psi^N(x,t,z)\right|^2dxdz+5\int_{\Omega_L}\left|v_1(x,t,z)\right|^2\left|\psi^N(x,t,z)\right|^2dxdz+5\left\|f(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}$$

для $\forall t\in[0,T]$. Используя условия на коэффициенты $v_0(x,t,z),v_1(x,t,z)$ и неравенства (28), (37), а также оценки (32) и (35) при $z=L$, имеем:

$$\left\|L\psi^N(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{L_2(\Omega_L)}\le c_{15}\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)}+\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right),\ \forall t\in[0,T], \qquad (40)$$

где $c_{15}>0$ постоянная не зависит от N.

Аналогично получению оценки (40) из (39), интегрируя обо части неравенства по t по интервалу $(0,T)$ и используя условия на коэффициенты $v_m(x,t,z), m=0,1$ и следующее неравенство для функции $f(x,t,z)$:

$$\|f(\cdot,.,z)\|^2_{L_2(\Omega_T)} \le c_{16}\left(\int_0^L \|f(.,.,z)\|^2_{L_2(\Omega_T)}dz + \int_0^L \left\|\frac{\partial f(.,.,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(\Omega_T)} dz\right),\ \forall z \in [0,L], \tag{41}$$

а также оценки (33) при $t=T$ и (34), получим справедливость неравенства:

$$\left\|L\psi^N(\cdot,.,z)\right\|^2_{L_2(\Omega_T)} \le c_{17}\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right),\ \forall z \in [0,L], \tag{42}$$

где $c_{17}>0$ постоянная не зависит от N.

В силу известного неравенства (см. [14 , стр. 118]):

$$\left\|\psi^N(\cdot,t,z)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} \le c_{18}\left\|L\psi^N(\cdot,t,z)\right\|^2_{L_2(0,l)} + c_{19}\left\|\psi^N(\cdot,t,z)\right\|^2_{L_2(0,l)}, \tag{43}$$

из оценок (28), (40), (42) получим справедливость следующих оценок:

$$\left\|\psi^N(\cdot,t,\cdot)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega_L)} \le c_{20}\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right),\ \forall t \in [0,T], \tag{44}$$

$$\left\|\psi^N(.,.,z)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega_T)} \le c_{21}\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right),\ \forall z \in [0,L], \tag{45}$$

где $c_{20}>0,\ c_{21}>0$ -постоянные не зависят от N. Наконец , интегрируя оценки (32), (44) по t по интервалу $(0,T)$, а оценки (34), (45) по z по интервалу $(0,L)$ и суммируя полученные оценки, имеем:

$$\left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)} \le c_{22}\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right) \tag{46}$$

где $c_{22}>0$ постоянная не зависит от N. Выбирая $c_0=c_{22}$ получим утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

Список литературы / References

1. *Воронцов М.А., Шмальгаузен И.И.* Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 335 с.
2. *Якубов С.Я.* Равномерная корректность задачи Коши для эволюционных уравнений и их приложения // Функ. анализ и его приложения, 1970. Т. 4. Вып. 3. С. 86-94.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 321 с.
4. *Насибов Ш.М.* Об одном нелинейном уравнении типа Шредингера // Дифференц.уравнения -1980, Т.16, № 4, С. 660-670.
5. *Pozzi G.A.* Problemi di Cauchy e problemi ai limiti per equazione de evoluzione de tipo di Scroedinger lineari e non lineari.-I, II // Ann.Math.Pura Appl.-I, 1968. Vol. 78; II-1969. Vol. 81.
6. *Мурадов Х.Р.* О первой краевой задаче для уравнения Шредингера // Докл. АН Азерб. ССР, 1983. Т. 39. № 2. С. 8-12.
7. *Владимиров М.В.* Разрешимость смешанной задачи для нелинейного уравнения Шредингера // Матем. сборник, 1986, Т.130, № 4, С. 520-536.
8. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я.* Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала // ДАН СССР, 1988, Т. 303. № 5. С. 1044-1048.
9. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я.* Оптимальное управление нелинейными квантовомеханическими системами // Автоматика и телемехан, 1989. № 12. С. 27-38.
10. *Искендеров А.Д.* Определение потенциала в нестационарном уравнении Шредингера // В сб.: «Проблемы матем. модел. и опт.управления». Баку, 2001. С. 6-36.
11. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я.* Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шредингера // Вестник Ленкоранского гос. ун-та, 2007. С. 3-56.

12. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Мусаева М.А.* Идентификация квантовых потенциалов. Баку. Çaşıoğlu, 2012. 552 с.
13. *Ягубов Г.Я., Ибрагимов Н.С.* Задача оптимального управления для нестационарного уравнения квазиоптики // В сб.: «Проблемы матем. модел. и опт. управления». Баку, 2001. С. 49-57.
14. *Искендеров А.Д., Ибрагимов Н.С.* Разрешимость начально-краевых задач для нестационарного уравнения квазиоптики // Вестник Ленкоранского гос. ун-та. Сер. естественных наук, 2009. Ленкорань. С. 47-66.
15. *Ладыженская О.А*. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
16. *Гохберг И.Н., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Изд-во «Наука». Москва, 1967.
17. *Нижник Л.П.* Обратная нестационарная задача рассеяния. Изд-во «Наукова Думка». Киев, 1973. 182 с.