

THE MAIN CHARACTERISTICS OF MATHEMATICAL THINKING AND EXAMPLE OF AN APPLIED PROBLEM INFLUENCING ITS DEVELOPMENT

Bekmuratova S.Ya. (Republic of Uzbekistan) Email: Bekmuratova56@scientifictext.ru

*Bekmuratova Suluxan Yaxipbaevna - Scientific researcher,
NUKUS STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE
NUKUS, REPUBLIC OF KARAKALPAKSTAN, REPUBLIC OF UZBEKISTAN,*

Abstract: the article deals with the main characteristics of mathematical thinking and examples of applied problems affecting its development. The study and analysis of psychological, pedagogical and methodical literature on the problem of research of applied problems for the formation of mathematical thinking of students were carried out. The question of the role of applied problems in the formation and development of mathematical thinking of students, the possibility through the use of applied problems at different stages of training to effectively influence the development of such qualities of mathematical thinking as depth, breadth, rationality, originality, etc.

Keywords: mathematical thinking, mathematical modeling, applied problem.

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ И ПРИМЕР ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ЕЁ РАЗВИТИЕ

Бекмуратова С.Я. (Республика Узбекистан)

*Бекмуратова Сулхун Яхипбаевна - научный исследователь,
Нукусский государственный педагогический институт,
г. Нукус, Республика Каракалпакстан, Республика Узбекистан*

Аннотация: в статье рассматриваются основные характеристики математического мышления и проведено примеры прикладных задач влияющие на её развитие. Осуществлялись изучение и анализ психолого-педагогической и методической литературы по проблеме исследования прикладных задач для формирования математического мышления учащихся. Разработано вопрос о роли прикладных задач в формировании и развитии математического мышления учащихся, о возможности с помощью использования прикладных задач на различных этапах обучения эффективно влиять на выработку таких качеств математического мышления как глубина, широта, рациональность, оригинальность и т.д.

Ключевые слова: математическая мышления, математическое моделирование, прикладная задача.

Усвоение школьниками системы математических знаний и овладение определенными математическими умениями и навыками является одной из задач сложного процесса математического образования. Другой задачей, не менее важной, чем первая, является развитие мышления учащихся.

Исследуя вопросы формирования теоретического мышления у школьников, Ю.М. Колягин рассматривает понятие математического мышления при следующих ограничениях: 1) «математическое мышление» используется как удобный рабочий термин; 2) не ставится целью характеризовать математическое мышление с «внутренней», чисто психологической стороны, целью является выявить определенные, проявляющиеся в учебной деятельности черты математического мышления, априори признать, что развитие их у школьников в процессе обучения математике повысит эффективность математического развития учащихся в целом, наметить некоторые дидактические пути реализации такого развития в обучении. При этих условиях Ю. М. Колягин [1, с. 106] вводит понятие «математическое мышление»: «Под математическим мышлением будем понимать, во-первых ту ФОРМУ, в которой проявляется диалектическое мышление в процессе познания человеком конкретной науки математики или в процессе применения математики в других науках, технике, народном хозяйстве и т. д.; во-вторых, ту специфику, которая обусловлена самой природой математической науки, применяемых ею методов познания явлений реальной действительности, а также, теми общими приемами мышления, которые при этом используются.»

Анализ, синтез, обобщение абстрагирование являются лишь логическими характеристиками тех действий и операций, которые производятся над моделями, т. е. характеристиками отдельных шагов динамического моделирования [2, с.199].

Математическое мышление у Л. М. Фридмана получило следующую трактовку: «Математическое мышление- это предельно абстрактное, теоретическое мышление, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интерпретироваться самым произвольным образом, лишь бы при этом сохранялись заданные между ними отношения» [2, с.41].

Принимая высказанную Л.М.Фридманом гипотезу, мы тотчас же приходим к выводу, что процесс формирования и развития мышления как способности решать задачи должен содержать в качестве одной из главных составных частей обучение методам и приемам моделирования. А это, в свою очередь, предполагает, что обучение учащихся будет содержать специальное ознакомление их с моделированием как методом познания. Математическое моделирование является составной частью решения прикладной задачи. Следовательно, исходя из гипотезы Л. М. Фридмана, мы неминуемо приходим к необходимости использования прикладных задач в целях развития математического мышления учащихся.

Математическое мышление, будучи частью мышления вообще, имеет свои специфические особенности. Они обусловлены спецификой изучаемых математикой объектов и спецификой применяемых при этом методов.

В. А. Крутецкий рассматривает следующие качества мыслительной деятельности, именуя их математическими способностями [3,с.385]:

1. Получение математической информации: способность к формализованному восприятию математического материала, схватыванию формальной структуры задачи.

2. Переработка математической информации:

а) способность к логическому мышлению в сфере количественных и пространственных отношений, числовой и знаковой символики; способность мыслить математическими символами;

б) способность к быстрому и широкому обобщению математических объектов, отношений и действий;

в) способность к свертыванию процесса математического рассуждения и системы соответствующих действий; способность мыслить свернутыми структурами;

г) гибкость мыслительных процессов в математической деятельности;

д) стремление к ясности, простоте, экономичности и рациональности решений;

е) способность к быстрой и свободной перестройке направленности мыслительного процесса, переключению с прямого на обратный ход мысли (обратимость мыслительного процесса при математическом рассуждении).

3. Хранение математической информации: математическая память (обобщенная память на математические отношения, типовые характеристики, схемы рассуждений и доказательств, методы решения задач и принципы подхода к ним).

4. Общий синтетический компонент: математическая направленность ума.

Ю. М. Колягин [1,с.108] к качествам научного мышления относит следующие: гибкость (нестандартность), оригинальность, глубина, целенаправленность, рациональность, широта (обобщенность), активность, критичность, доказательность мышления, организованность памяти, четкость и лаконичность речи и записи.

Оригинальность мышления заключается в применении необычных способов решения известных учащимся задач. Это следствие глубины мышления.

Глубина мышления характеризуется умением проникать в сущность каждого из изучаемых фактов, в их взаимосвязи с другими фактами; выявлять специфические, скрытые особенности в изучаемом материале (в условии задачи, способе ее решения, результате); умением конструировать модели конкретных ситуаций. Глубину мышления часто называют умением выделять существенное. Противоположность глубине мышления-поверхностность мышления.

Целенаправленность мышления характеризуется стремлением осуществлять разумный выбор действий при решении какой-либо проблемы, постоянно ориентируясь на поставленную этой проблемой цель, а также в стремлении отыскать наиболее кратчайшие пути ее достижения.

Рациональность мышления характеризуется склонностью к экономии времени и средств для решения поставленной проблемы, стремлением отыскать оптимально простое в данных условиях решение задачи, использовать в ходе решения схемы, символику, условные обозначения.

Широта мышления понимается как способность к формированию обобщенных способов действий, имеющих широкий диапазон переноса и применения к частным, нетипичным случаям; умение охватить проблему в целом, не упуская при этом имеющих значение деталей, обобщить проблему, расширить область приложения результатов, полученных в результате ее разрешения.

Активность мышления характеризуется постоянством усилий, направленных на решение некоторой проблемы, желанием обязательно решить поставленную проблему, изучить различные подходы к ее решению, исследовать различные варианты постановки этой проблемы в зависимости от изменяющихся условий и т. д.

Критичность мышления характеризуется умением оценить правильность выбранных путей решения поставленной проблемы, оценить результаты с точки зрения их достоверности, значимости.

Доказательность мышления характеризуется умением терпеливо и скрупулезно относиться к собиранию фактов, достаточных для вынесения какого-либо суждения; стремлением к обоснованию

каждого шага решения задачи, умением отличать результаты достоверные от правдоподобных; вскрывать подлинную причастность связи посылки и заключения.

Организованность памяти означает способность к запоминанию, долговременному сохранению, быстрому и правильному воспроизведению основной учебной информации и упорядоченного опыта.

Ясность, точность, лаконичность речи и записи – качества мышления, присущие математическому мышлению. Они тесно связаны с вышеперечисленными качествами мышления.

Несомненно, что все перечисленные качества характеризуют математический стиль мышления, имеющий свою специфику. А. Я. Хинчин указал лишь четыре характерных признака математического мышления [4, с. 141-144]:

1) «Для математики характерно доведенное до предела доминирование логической схемы рассуждения... Эта своеобразная черта стиля математического мышления, в столь полной мере не встречающаяся ни в одной другой науке, имеет в себе много ценного. Очевидно, что она в максимальной степени позволяет следить за правильностью течения мысли и гарантирует от ошибок; с другой стороны, она заставляет мыслящего при каждой дизъюнкции иметь перед глазами всю совокупность имеющихся возможностей и обязывает его учесть каждую из них, не пропуская ни одной.»

2) «...лаконизм, сознательное стремление всегда находить кратчайший, ведущий к данной цели логический путь, беспощадное отбрасывание всего, что не абсолютно необходимо для безупречной аргументации.»

3) «...четкая расчлененность хода аргументации». Для этого в математических работах широко используется такой простой прием, как нумерация понятий и суждений, а перед каждым абзацем ставится особое обозначение, указывающее, какой случай из всех рассматривается в данном абзаце.

4) скрупулезная точность символики. «Каждый математический символ имеет строго определенное значение: замена его другим символом или перестановка на другое место, как правило, влечет за собой искажение, а подчас и полное уничтожение смысла данного высказывания.»

А. И. Маркушевич [5, с.3], характеризуя математическое мышление школьников, назвал следующие качества: «умение вычленять сущность вопроса, отвлекаясь от несущественных деталей (умение абстрагировать); умение строить такую схему явления, в которой сохранено только то, что нужно для математической трактовки вопроса, а именно: отношение принадлежности, порядка, количества, меры, пространственного расположения (умение схематизировать), что в свою очередь предполагает упрощение первоначальной постановки вопроса при помощи надлежащей рабочей гипотезы; умение выводить логические следствия из данных предпосылок (дедуктивное мышление); умение анализировать данный вопрос, вычленив из него частные случаи, различать, когда они исчерпывают все возможности и когда они являются только примерами и всех возможных случаев не охватывают; умение применять выводы, полученные из теоретических рассуждений, к конкретным вопросам и сопоставлять результаты с тем, что мы «предвычисляли или теоретически предполагали»; оценивать влияние изменяющихся условий на надежность результата; обобщать полученные выводы и ставить новые вопросы в обобщенном виде.»

Аналогичные свойства, характеризующие математическое мышление, были выделены Б.В.Гнеденко [6, с.32]: способность улавливать нечеткость рассуждения, отсутствие необходимых звеньев доказательств, привычка к полноценной логической аргументации, четкая расчлененность хода рассуждения, лаконизм, точность символики.

Основные компоненты математического мышления могут быть выделены, исходя из специфики математического мышления, которая обусловлена не только тем, что математическому мышлению присущи все качества научного мышления, но и особыми формами его: конкретное и абстрактное мышление, функциональное мышление, интуитивное мышление и т. д.

Конкретное (предметное) мышление – это мышление в тесном взаимодействии с конкретной моделью объекта. Оно подразделяется на:

- 1) неоперативное (наблюдение, чувственное восприятие);
- 2) оперативное (непосредственные действия с конкретной моделью объекта).

Конкретное мышление играет большую роль в образовании абстрактных понятий, в конструировании особых свойств математического мышления, развитие которых способствует познанию математических абстракций.

Абстрактное мышление – это мышление, которое характеризуется умением мысленно отвлечься от конкретного содержания изучаемого объекта в пользу его общих свойств, подлежащих изучению. Абстрактное мышление подразделяется на: аналитическое мышление; логическое мышление; пространственное мышление. Специфика аналитического мышления состоит в четкости отдельных этапов в познании, полном осознании как его содержания, так и применяемых операций. Проявление аналитического мышления идет через:

- 1) аналитический способ доказательства теорем и решения задач;
- 2) решение задач методом уравнений;

3) исследование результата решения некоторой задачи и т. п.

Специфика логического мышления заключается в :

- 1) умение выводить следствия из данных предпосылок;
- 2) умение вычленять частные случаи из некоторого общего положения;
- 3) умение теоретически предсказывать конкретные результаты, обобщать полученные выводы и т.

д.

Дело в том, что мышление, в отличие от других процессов совершается с определенной логикой. Соответственно в структуре мышления можно выделить следующие логические операции: сравнение, анализ, синтез, абстракция и обобщение. Кроме этого, имеются еще и процессы мышления, выраженные в соответствующих формах. К ним относятся суждение, умозаключение, определение понятий, индукция и дедукция. Хотя логические операции органически входят в состав мышления, оно не всегда выступает как процесс, в котором действуют только логика и разум. В процесс мышления зачастую вмешиваются, изменяя его, эмоции.

Специфика пространственного мышления заключается в :

- 1) умении мысленно конструировать пространственные образы или схематические конструкции изучаемых объектов;
- 2) умении выполнять над ними операции, соответствующие им, которые должны были быть выполнены над самими объектами.

Интуитивное мышление, как один из компонентов математического мышления характеризуется тем, что в нем отсутствуют четко определенные этапы. Оно имеет тенденцию основываться прежде всего на свернутом восприятии всей проблемы сразу. Человек достигает ответа, который может быть правильным или ошибочным, не осознавая тот процесс, посредством которого он получил искомый ответ. Обычно интуитивное мышление основывается на знакомстве с основными знаниями в данной области и их структурой, и это дает ему возможность осуществляться в виде скачков, быстрых переходов, с пропуском отдельных звеньев; эти особенности требуют проверки выводов аналитическими средствами.

Функциональное мышление как компонент математического мышления характеризуется осознанием динамики общих и частных соотношений между математическими объектами или их свойствами (и умением это использовать), ярко проявляется в связи с изучением одной из ведущих идей школьного курса математики- идеи функции.

Майер Р.А. [7, с. 17] выделил наиболее характерные черты функционального мышления:

- 1) представление математических объектов в движении, изменении;
- 2) операционно-действенный подход к математическим фактам, оперирование причинно-следственными связями;
- 3) склонность к содержательным интерпретациям математических фактов, повышенное внимание к прикладным аспектам математики.

Развитие функционального мышления тесно связано с использованием задач на математическое выражение конкретных ситуаций с ярко выраженным « функциональным» содержанием и последующее использование их. Решение такой задачи содержит в себе три аспекта:

- 1) в изучаемом явлении выделяют основные, существенные связи, отбрасывая второстепенные, несущественные детали; вводят различного рода упрощения и допущения;
- 2) связав объекты, выступающие в изучаемом явлении, с числами или геометрическими образами, переходят от зависимостей между этими объектами к математическим соотношениям-формулам, таблицам, графикам;
- 3) полученные математические соотношения исследуют, пользуясь уже известными, выработанными и изученными правилами действий над ними, результаты исследования истолковывают в терминах и понятиях изучаемого явления.

Компонентами математического мышления являются: интуитивное мышление, конкретное мышление, абстрактное (аналитическое, логическое, пространственное) мышление, функциональное мышление.

Качества математического мышления: гибкость, активность, целеустремленность, точность, доказательность, глубина, оригинальность, рациональность, широта, критичность и т. д. в своей совокупности приводят к выработке особого стиля мышления- научного стиля мышления.

Проблема выработки математического стиля мышления учащихся является актуальной и недостаточно разработанной в основных ее положениях. Как показал опыт, вооружение учащихся системой научных знаний не обеспечивает автоматически, «попутно», формирования у них научного стиля мышления. Научный стиль мышления- это такой уровень культуры мышления, на который учащиеся смогут подняться только в результате целенаправленной, специально организованной работы с ними. Как показало исследование Н. А. Терешина [8, с.22], формируя научный стиль математического мышления, в качестве одного из главных факторов в обучении математике нужно учитывать интуитивное восприятие, которое должно сформироваться в данном, конкретном случае и которое

наиболее способствует творческой деятельности учащихся. Чем больше развита интуиция у данного ученика, тем выше уровень его математического мышления.

Как итог исследования вопроса об основных характеристиках математического мышления получаем следующие выводы:

1) математическое мышление как часть мышления вообще имеет свои специфические особенности, которые обусловлены спецификой изучаемых математикой объектов и спецификой применяемых при этом методов;

2) в качестве основных характеристик математического мышления мы выделяем: а) формы мышления (понятия, суждения, умозаключения); б) компоненты мышления (интуитивное, конкретное, абстрактное, функциональное и т.д.); в) качества мышления (гибкость, активность, глубина, критичность и т.д.).

3) выделение компонентов и качеств математического мышления целесообразно, поскольку целенаправленная работа учителя по их формированию и развитию реализует задачу математического развития учащихся в целом.

Прикладная направленность школьного курса математики явно недостаточна для реализации целей математического образования, поскольку в курсе алгебры формируется математический аппарат, обслуживающий практически лишь внутренние потребности курса математики и в меньшей степени других школьных предметов, а основной упор курса геометрии сделан на дедуктивные рассуждения, основой которых является аксиоматический метод.

Осуществление прикладной направленности школьного курса математики теснейшим образом связано с применением математического моделирования. Это было отмечено Б.В.Гнеденко, С.Л.Соболевым, А.Н. Тихоновым и другими. С.Л.Соболев по этому поводу писал [9, с. 15]: «Практическая направленность курса математики в наше время означает прежде всего то, что учащихся надо познакомить с соотношениями между явлениями реального или проектируемого мира и его математическими моделями. Школьников надо практически научить строить математические модели для встречающихся жизненных явлений.»

Характеризуя сущность математического моделирования, А.Н.Тихонов и Д.П.Костомаров отмечали [10, с. 15]: «Математическая модель никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передаёт всех его свойств и особенностей. Основанная на упрощении, идеализации, она является его приближённым отражением.»

Исследование прикладных задач обычно начинается с построения и анализа простейшей, наиболее грубой математической модели рассматриваемого объекта. Однако в дальнейшем часто возникает необходимость уточнить модель, сделать её соответствием объекту более полным.

В школе часто приходится решать задачи, приводящие к динамическим моделям, т.е. к моделям, которые постоянно уточняются, обновляются в зависимости от варьирования параметров моделируемого явления. Приведём пример, как можно формировать у учащихся представление о развитии и уточнении построенной математической модели.

Пример. Трактор «Кировец» за световой день расходует на 1,5 кг автола больше, чем трактор «Беларусь». Определите расход автола за световой день каждым трактором, если «Кировец» израсходовал 94 кг, а «Беларусь» 75 кг автола, причём «Беларусь» проработал на два дня больше «Кировца».

Решение. Построим математическую модель задачи: пусть x кг-расход автола «Беларусью», тогда «Кировец» а световой день расходует $(x+1,5)$ кг. Построим математическую модель задачи: пусть x кг-расход автола «Беларусью», тогда «Кировец» а световой день расходует $(x + 1,5)$ кг. Время работы «Беларуси» – $\frac{75}{x}$ световых дней, а время работы «Кировца» – $\frac{94}{x+1,5}$ световых дней. Приходим к уравнению :

$$\frac{75}{x} - \frac{94}{x+1,5} = 2 .$$

Математическая модель построена. Преобразуем её к виду

Построим математическую модель задачи: пусть x кг-расход автола «Беларусью», тогда «Кировец» а световой день расходует $(x + 1,5)$ кг. Время работы «Беларуси» – $\frac{75}{x}$ световых дней, а время работы «Кировца» – $\frac{94}{x+1,5}$ световых дней. Приходим к уравнению : $\frac{75}{x} - \frac{94}{x+1,5} = 2$. Математическая модель построена. Преобразуем её к виду

$$\frac{2x^2 + 22x - 112,5}{x \cdot (x + 1,5)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 22x - 112,5 = 0 \\ x \cdot (x + 1,5) \neq 0 \end{cases}$$

Чтобы решить систему, надо знать как решать уравнение $2x^2 + 22x - 112,5 = 0$. Его и называют квадратным. Мотивация введения понятия квадратного уравнения дана.

Формируя представления у учащихся о математическом моделировании, построении математической модели, мы стремились добиться сознательного усвоения учащимися следующих действий:

– замена исходных терминов их математическими эквивалентами;

- оценка полноты исходной информации (какие факты излишни, какие недостающие, каковы невыделенные характеристики и т.д.)
- выбор точности числовых значений, соответствующий смыслу задачи;
- выбор существенных переменных и установление взаимосвязи между ними.

Естественно, что при решении такого типа задач у учащихся вырабатываются навыки и умения анализировать и синтезировать, обобщать и вычленять частичные случаи, сравнивать и получать следствия. Это приводит к развитию и совершенствованию таких качеств ума как гибкость, глубина, устойчивость, самостоятельность, что в свою очередь, способствует выработке качеств математического мышления: гибкости (нешаблонности), оригинальности, рациональности, критичности, доказательности и т.д.

Список литературы / References

1. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов -2-е изд., перераб и доп. М.: Просвещение, 1980. 386 с.
2. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач.- М.: Педагогика, 1977. 208 с.
3. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников.» М.: Просвещение, 1968. 432 с.
4. Хинчин А.Я. Педагогические статьи.-М.: АПН РСФСР, 1963. 204 с.
5. Маркушевич А.И. Об очередных задачах преподавания математики в школе // Математика в школе.- 1962.-№2.-С.3-14.
6. Гнеденко Б.В. Архитектура математики.-М.: Знание, 1972. 32 с.
7. Майер Р.А. Задачи, направленные на развитие функционального стиля мышления школьников//Роль и место задач в обучении математике. М.; 1973. С. 36-50.
8. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики.- М.: Просвещение, 1990. 96 с.
9. Соболев С.Л. Судить по конечному результату // Математика в школе.-1984.1. С Л 5-19.
10. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Рассказы о прикладной математике, М.: Наука, 1979. 206 с.