IMPLEMENTATION OF THE FEM IN A MIXED FORMULATION AND A VARIANT OF THE METHOD OF DISPLACEMENT

Yushkin V.N. (Russian Federation) Email: Yushkin551@scientifictext.ru

Yushkin Vladislav Nikolaevich - Associate Professor, Candidate of Technical Sciences,
DEPARTAMENT APPLIED GEODESY, ENVIRONMENTAL MANAGEMENT AND WATER USE,
FEDERAL STATE BUDGET EDUCATIONAL INSTITUTION OF HIGHER PROFESSIONAL EDUCATION
VOLGOGRAD STATE AGRARIAN UNIVERSITY, VOLGOGRAD

Abstract: *the algorithms for obtaining the finite element stiffness matrix in the variant of the displacement method formulation and the formation of the finite element deformation matrix in the mixed formulation of the finite element method using the modified Reissner functional are presented. In the variant of the displacement method, a four-node finite element was used to calculate engineering structures. As the nodal unknowns, movements and their derivatives were taken. The comparison of FEM algorithms in the formulations of the displacement method and the mixed method is performed.*
Keywords: *stiffness matrix, finite element, displacement method, deformation matrix formation, mixed formulation.*

РЕАЛИЗАЦИЯ МКЭ В СМЕШАННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ И В ВАРИАНТЕ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Юшкин В.Н. (Российская Федерация)

Юшкин Владислав Николаевич - доцент, кандидат технических наук,
кафедра прикладной геодезии, природообустройства и водопользования,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Волгоградский государственный аграрный университет, г. Волгоград

Аннотация: *изложены алгоритмы получения матрицы жесткости конечного элемента в варианте формулировки метода перемещений и формирования матрицы деформирования конечного элемента в смешанной формулировке МКЭ при использовании модифицированного функционала Рейсснера. В варианте метода перемещений использовался четырехузловой конечный элемент для расчета инженерных сооружений. В качестве узловых неизвестных принимались перемещения и их производные. Выполнено сравнение алгоритмов МКЭ в формулировках метода перемещений и смешанного метода.*
Ключевые слова: *матрица жесткости, конечный элемент, метода перемещений, формирования матрицы деформирования, смешанная формулировка.*

В расчетах широкое применение нашли четырехузловые и восьмиузловые конечные элементы, при формировании матриц жесткости которых используется метод перемещений [1].

1. В качестве конечного элемента принимается произвольный фрагмент пластины с узлами *i*, *j*, *k*, *l*. Для выполнения численного интегрирования четырехугольный фрагмент отображается на квадрат с локальными координатами ξ и η. Интервалы изменения значений координат ξ и η определяются неравенствами $-1 \le \xi \le 1$, $-1 \le \eta \le 1$.

Глобальные координаты *x* и *y* произвольной точки срединной поверхности криволинейного конечного элемента связаны с локальными координатами ξ и η зависимостями

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1-\xi)}{2}\frac{(1-\eta)}{2}x^i + \frac{(1+\xi)}{2}\frac{(1-\eta)}{2}x^j + \\ &+ \frac{(1+\xi)}{2}\frac{(1+\eta)}{2}x^k + \frac{(1-\xi)}{2}\frac{(1+\eta)}{2}x^l; \\ y &= \frac{(1-\xi)}{2}\frac{(1-\eta)}{2}y^i + \frac{(1+\xi)}{2}\frac{(1-\eta)}{2}y^j + \\ &+ \frac{(1+\xi)}{2}\frac{(1+\eta)}{2}y^k + \frac{(1-\xi)}{2}\frac{(1+\eta)}{2}y^l, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где индексами i, j, k и l отмечены величины, относящиеся к соответствующим узлам конечного элемента.

Дифференцированием (1.1) определяем производные глобальных координат в локальной системе

$$x_{,\xi} = \left\{f_{,\xi}\right\}^T \left\{x_y\right\};\; x_{,\eta} = \left\{f_{,\eta}\right\}^T \left\{x_y\right\};$$

$$y_{,\xi} = \left\{f_{,\xi}\right\}^T \left\{y_y\right\};\; y_{,\eta} = \left\{f_{,\eta}\right\}^T \left\{y_y\right\}. \qquad (1.2)$$

Производная локальных координаты в глобальной системе

$$\xi_{,x} = \frac{y_{,\eta}}{\Delta};\; \eta_{,x} = -\frac{y_{,\xi}}{\Delta};\; \xi_{,y} = -\frac{x_{,\eta}}{\Delta};\; \eta_{,y} = \frac{x_{,\xi}}{\Delta}, \qquad (1.3)$$

где - $\Delta = \left\{f_{,\xi}\right\}^T \left\{x_y\right\}\cdot\left\{f_{,\eta}\right\}^T \left\{y_y\right\} - \left\{f_{,\xi}\right\}^T \left\{y_y\right\}\cdot\left\{f_{,\eta}\right\}^T \left\{x_y\right\}$.

Вектор узловых перемещений конечного элемента можно записать в локальной и глобальной системах координат

$$\left\{w_y^{л}\right\}^T = \left\{w^i,\, w^j,\, w^k,\, w^l \quad w^i_{,\xi},\, w^j_{,\xi},\, w^k_{,\xi},\, w^l_{,\xi},\, w^i_{,\eta},\, w^j_{,\eta},\, w^k_{,\eta},\, w^l_{,\eta}\right\};$$

$$\left\{w_y^{г}\right\}^T = \left\{w^i,\, w^j,\, w^k,\, w^l \quad w^i_{,x},\, w^j_{,x},\, w^k_{,x},\, w^l_{,x},\, w^i_{,y},\, w^j_{,y},\, w^k_{,y},\, w^l_{,y}\right\}, \qquad (1.4)$$

где $w_{,\xi},\, w_{,\eta},\, w_{,x},\, w_{,y}$ – первые производные нормального перемещения пластины в локальной и глобальной системах координат.

Перемещение произвольной точки конечного элемента и ее производная выражаются через соответствующие узловые значения в виде зависимостей

$$\begin{aligned}
w = {} & h_1(\xi)h_1(\eta)w^i + h_2(\xi)h_1(\eta)w^j + \\
& + h_2(\xi)h_2(\eta)w^k + h_1(\xi)h_2(\eta)w^l + \\
& + h_3(\xi)h_1(\eta)w^i_{,\xi} + h_4(\xi)h_1(\eta)w^j_{,\xi} + \\
& + h_4(\xi)h_2(\eta)w^k_{,\xi} + h_3(\xi)h_2(\eta)w^l_{,\xi} + \\
& + h_1(\xi)h_3(\eta)w^i_{,\eta} + h_2(\xi)h_3(\eta)w^j_{,\eta} + \\
& + h_2(\xi)h_4(\eta)w^k_{,\eta} + h_1(\xi)h_4(\eta)w^l_{,\eta} = \{\psi\}^T\left\{w_y^{л}\right\};
\end{aligned} \qquad (1.5)$$

$$w_{,x} = \left\{\psi_{,x}\right\}^T\left\{w_y^{л}\right\};\; w_{,y} = \left\{\psi_{,y}\right\}^T\left\{w_y^{л}\right\}.$$

Для вывода матрицы жесткости и вектора сил конечного элемента используется равенство работ внутренних и внешних сил конечного элемента на возможном перемещении

$$П \equiv \int_V \{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dV - \int_0^l w\cdot q dx = 0, \qquad (1.7)$$

где $dV = dxdydz$.

2. Во втором варианте для формирования матрицы деформирования элемента в смешанной формулировке МКЭ использован модифицированный функционал Рейсснера [2, 3], который для пластины можно представить выражением

$$П_R \equiv b\int_S \{M\}^T\{\chi\}dS - \frac{1}{2}\int_S \{M\}^T[C]\{M\}dS - \int_S wqdS = 0, \qquad (2.1)$$

где $\underset{1\times 3}{\{M\}^T} = \left\{M_{11},\, M_{22},\, M_{12}\right\}$ – момент в рассматриваемом сечении;

$\{\chi\}^T = \{\chi_{11}, \chi_{22}, 2\chi_{12}\}$; S – площадь пластинки.

Здесь принято

$$\underset{3\times1}{\{\chi\}} = \underset{3\times3}{[C]}\underset{3\times1}{\{M\}}. \qquad (2.2)$$

Для получения матрицы деформирования конечного элемента использованы следующие интерполяционные зависимости

$$w = \underset{1\times12}{\{\psi\}^T}\underset{12\times1}{\{w_y^{л}\}};\quad \underset{3\times1}{\{\chi\}} = \underset{3\times12}{[A_\chi]}\underset{12\times1}{\{w_y^{л}\}};\quad \underset{3\times1}{\{M\}} = \underset{3\times12}{[A_M]}\underset{12\times1}{\{M_y\}}, \qquad (2.3)$$

где $\underset{3\times12}{[A_\chi]} = \begin{bmatrix} \underset{1\times12}{\{\psi_{,xx}\}^T} \\ \underset{1\times12}{\{\psi_{,yy}\}^T} \\ \underset{1\times12}{\{\psi_{,xy}\}^T} \end{bmatrix}$; $\{A_M\} = \begin{bmatrix} \underset{1\times4}{\{\varphi\}^T} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{1\times4}{\{\varphi\}^T} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{1\times4}{\{\varphi\}^T} \end{bmatrix}$;

$\underset{1\times4}{\{\varphi\}^T}$ – билинейные функции формы;

$$\underset{1\times12}{\{M_y\}^T} = \{M_{11}^i, M_{11}^j, M_{11}^k, M_{11}^l, M_{22}^i, M_{22}^j, M_{22}^k, M_{22}^l, M_{12}^i, M_{12}^j, M_{12}^k, M_{12}^l\}.$$

С учетом аппроксимирующих выражений функционал (2.1) запишем в виде

$$\Pi \equiv \underset{1\times12}{\{M_y\}^T} b\int_S \underset{12\times3}{[A_M]^T}\underset{3\times12}{[A_\chi]}[R]dS\underset{12\times1}{\{w_y^{г}\}} -$$

$$-\frac{1}{2}\{M_y\}^T\int_S [A_M]^T[C][A_M]dS - \{w_y^{г}\}^T[R]^T\int_S\{\psi\}qdS = 0, \qquad (2.4)$$

Минимизируя равенство (2.2), можно записать следующие матричные зависимости

$$\frac{\partial\Pi_R}{\partial\{M_y\}^T} \equiv [Q]\{w_y\} - [H]\{M_y\} = 0;$$

$$\frac{\partial\Pi_R}{\partial\{w_y\}^T} \equiv [Q]^T\{M_y\} - \{f_y\}qdx = 0, \qquad (2.5)$$

где $[Q] = b\int_S [A_M]^T[A_\chi]dS[R]$, $[H] = \int_S [A_M]^T[C][A_M]dS$,

$\{f_y\} = [R]\int_S\{\psi\}qdS$.

Уравнение (2.3) можно записать в матричном виде

$$[K]\{z_y\} = \{F\}, \qquad (2.6)$$

где

$$[K]=\begin{bmatrix} -\underset{12\times12}{[H]} & \underset{12\times12}{[Q]} \\ \underset{12\times12}{[Q]^T} & 0 \end{bmatrix}, \quad \{z_y\}^T=\{\{M_y\}^T\{w_y\}^T\}, \qquad \{F\}^T=\{\{0\}^T\{f_y\}^T\}.$$

В качестве примера была рассмотрена консольная балка, находящаяся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q. Моменты в заделке оказались в обоих вариантах расчета одинаковыми при представлении балки одним элементом.

Список литературы / References

1. *Николаев А.П., Киселев А.П., Юшкин В.Н.* Восьмиугольный конечный элемент для расчета толстостенных оболочек вращения. Казань, 2000. С. 327-331.
2. *Юшкин В.Н.* Сравнительный анализ результатов расчета инженерных конструкций с использованием МКЭ в смешанной формулировке и в варианте метода перемещений. Волгоград, 2016. с. 201-209.
3. *Юшкин В.Н.* Расчет гидротехнических сооружений в смешанной формулировке на основе МКЭ. Волгоград, 2017. С. 358-365.