TO INVESTIGATION OF THE WILKINSON'S PARADOX

Slyusarenko A.S.[1], Dudarev A.S.[2] (Russian Federation)
Email: Slyusarenko549@scientifictext.ru

[1]Slyusarenko Alexander Sergeevich - Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor,
DEPARTMENT OF AEROSPACE SYSTEMS OPERATION AND MANAGEMENT,
FEDERAL STATE BUDGET EDUCATIONAL INSTITUTION OF HIGHER PROFESSIONAL EDUCATION
STATE UNIVERSITY OF AEROSPACE INSTRUMENTATION;
[2]Dudarev Alexey Sergeevich – Adjunct,
DEPARTMENT OF NAVAL SUBMARINE ARMAMENT,
MILITARY INSTITUTE (NAVAL)
MILITARY EDUCATIONAL AND SCIENTIFIC CENTER "NAVAL ACADEMY",
SAINT PETERSBURG

Abstract: *the article deals with the use of adaptive methods for studying the Wilkinson paradox. The focus of the research is related to the identification of conditions for changing the semantic properties of the base polynomial and second-order polynomials in the Hitchcock iterations. As a basis for adaptive methods, a priori methods for estimating rounding errors were adopted, which provided an estimate of the metrological level of computational transformations, as well as separation and separate study of the components of the total error. The algorithmic aspects of the adaptation of methods are based on the substantial use of information generated during the computational experiment, as well as, a priori information on the initial equation.*
Categories and subjects of description: (Primary) G.1.0 [Numerical analysis]: General - computer arithmetic, (Additional) error analysis, numerical methods, a priori methods of forward and backward analysis.
Keywords: *normalized number, floating point number, float number, floating-point standard, rounding error, Ulp, rounding error (re), a priori methods of forward and backward analysis, the perturbed polynomial form, irreducible polynomials of the second order, polynomial equations, complex roots, the method for solving polynomial equations, Wilkinson's polynom, Wilkinson's paradox.*

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПАРАДОКСА УИЛКИНСОНА

Слюсаренко А.С.[1], Дударев А.С.[2] (Российская Федерация)

[1]Слюсаренко Александр Сергеевич - кандидат технических наук, доцент,
кафедра эксплуатации и управления аэрокосмическими системами,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Государственный университет аэрокосмического приборостроения;
[2]Дударев Алексей Сергеевич – адъюнкт,
кафедра морского подводного вооружения подводных лодок,
Военный институт (военно-морской)
Военный учебно-научный центр «Военно-морская академия»,
г. Санкт-Петербург

Аннотация: *в статье рассматривается использование адаптивных методов исследования парадокса Уилкинсона. Акцент исследований связан с выявлением условий изменения семантических свойств базового полинома и полиномов 2-го порядка в итерациях Хичкока. За основу адаптивных методов приняты априорные методы оценки ошибок округления, обеспечившие оценку метрологического уровня вычислительных преобразований, а также разделение и раздельное исследование составляющих полной погрешности. Алгоритмические аспекты адаптации методов основываются на существенном использовании генерируемой в ходе вычислительного эксперимента информации, а также априорной информации об исходном уравнении.*
Категории и субъекты описания: (Первичные) G.1.0 [Численный анализ]: Общие – компьютерная арифметика, (Дополнительные) анализ погрешностей, численные методы, априорные методы прямого и обратного анализа.
Ключевые слова: *нормализованное число, число с плавающей точкой, FPN, флоат - число, floating-point standard, ошибка округления, Ulp, rounding error (re), a priori methods of forward and backward analysis, the perturbed polynomial form, irreducible polynomials of the second order, polynomial equations, complex roots, the method for solving polynomial equations, Wilkinson's polynom, Wilkinson's paradox.*

УДК 681.5:681.3.06

Введение

Проблема исследования зависимости положения и вида корней полинома от возмущения его коэффициентов, впервые была представлена в широко известной работе Уилкинсона, опубликованной еще в 1959 в работе [1], в которой был установлен факт, определенный как *ill-conditioned polynomials.*

В численном анализе полиному и связанному с ним факту *ill-conditioned polynomials* соответствуют устойчивые идиомы: «полином Уилкинсона» и «парадокс Уилкинсона», семантика которого наилучшим образом раскрывается в терминах «теории возмущений».

На сегодняшний день существует множество теоретических подходов к определению устойчивости и неустойчивости полиномиальных схем и задач. Прежде всего, открывателя парадокса, Уилкинсона, и др. выдающихся ученых в области численных методов [2, 3, 4, 5, и т.д.]. Исследование этого феномена дало основание для построения целого ряда направлений численного анализа: - чувствительности; - робастности; - устойчивости систем и т.д. Одной из наиболее важных областей инженерной практики *ill-conditioned polynomials* является теория управления. В качестве примера *парадокс и полином Уилкинсона* входят во все учебники по численному анализу, см., например [5, 6, 7, 8]. Особое место занимают, работы Ю.П. Петрова, в которых ставится вопрос о выделении третьего класса задач – промежуточного между корректными и некорректными, предлагаются методы их исследования, (подробнее см. [4]).

Перечень публикаций, так, или иначе связанных с исследованием парадокса, Уилкинсона - огромен. Подавляющее большинство работ посвящено обратному анализу линейных систем, интерес к которым особенно возрос в последние годы в связи с построением информационно-измерительных и высокоточных управляющих систем реального времени. Например, по совместимости, точности и устойчивости линейных систем, связных несвязных проблем метода наименьших квадратов, см., на пример [9, 10, 11, 12, 13, 14].

Однако в них недостаточно освещены вопросы практического характера, связанные с применением конкретных ЭВМ, методов и алгоритмов при осуществлении математического моделирования и влиянием особенностей машинной обработки числовой информации на устойчивость решений к вариациям исходных данных.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию именно этих вопросов, по - существу, предопределяющих постановку и содержание задач исследования.

В качестве объекта исследования принят итерационный метод Хичкока для вычисления корней полинома Уилкинсона.

Целью исследований является построение адаптивного варианта метода Хичкока для исследования зависимости корней полинома Уилкинсона от возмущения его коэффициентов.

Для описания FPN, *Ulp,* задач и методов в статье использованы принятые в англоязычной литературе устойчивые термины и аббревиатуры.

Статья состоит из трех тесно связанных частей.

Первая часть содержит краткие (основные) сведения о моделях: прямого и обратного анализа; обобщенного описания принятого за основу численного метода вычисления корней полиномиального уравнения; описания *ill-conditioned polynomials* в терминах Уилкинсона, а также постановку частных задач исследования.

Вторая часть содержит основные сведения об особенностях построениях адаптивного варианта метода Хичкока для вычисления корней полинома Уилкинсона.

Третья часть содержит описание результатов вычислительных экспериментов с использованием для исследования программных средств, представляющих разработанный метод. Особенностью программной реализации является реализация адаптивной настройки алгоритма в реальном времени.

Для самодостаточности в разделах 1 и 2 приведен необходимый минимум сведений о классических методах решения полиномиальных уравнений и априорных методах оценивания ошибок округления в FBA std IEEE-754 соответственно.

1. Основы методов компьютерного решения полиномиальных уравнений (Background)

1.1. Классический подход. Well-conditioned polynomials

Для решения полиномиальных алгебраических уравнений произвольных степеней в классическом анализе разработаны эффективные методы, развивающие подход Ньютона применительно к уравнению

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \times^i \qquad (1.1.1)$$

В случае хорошо обусловленных (*well-conditioned polynomials*) задача нахождения корней полинома обеспечена многочисленными методами ее решения и не представляет трудностей.

Представляется важным отметить, что в классическом математическом анализе (и численном анализе) есть теорема о непрерывной зависимости корней полиномов, от их коэффициентов. Однако в силу неконструктивности в практике компьютерных вычислений этот результат не востребован. Основной трудностью при численном решении является выявление информации о принадлежности уравнения к множеству *well-conditioned polynomials.* Именно с этой целью при построении методов и алгоритмов нахождения корней полиномов в численном анализе появляется полином Уилкинсона

$$P_{20}(x) = \prod_{1}^{20} (x - i) \,. \qquad (1.1.2)$$

1.2. *Ill-conditioned polynomials*:Полином Уилкинсона

Полином Уилкинсона является специфическим многочленом, который был использован Джеймсом Х. Уилкинсоном, чтобы проиллюстрировать проблему решения вопроса о принадлежности рассматриваемого полинома *well-conditioned polynomials* и трудности при нахождении корня многочлена в случае *ill-conditioned polynomials* в традиционной форме:

$$P_{20}(x) = \sum_{i=0}^{20} \alpha_i \times^i \,. \qquad (1.2.1.)$$

Многочлен (1.1.2) имеет 20 хорошо отделимых действительных корней,

$$x_1 = 1; x_2 = 2; ..., x_{20} = 20. \qquad (1.2.2)$$

Вместе с тем, полином Уилкинсона наглядно свидетельствует о наличии семантического разрыва между теоретической и машинной арифметикой, проявляясь в *ill-conditioned polynomials,* непредсказуемыми изменениями семантических свойств полинома, определяемых его корнями: - (даже при очень маленьких возмущениях коэффициентов многочлена – *сущность парадокса Уилкинсона*). Действительно, если полином задать коэффициентами, а затем изменить коэффициент

$$a_{19} = 210 \text{ (при } x_{19} \text{) на } \delta = 2^{-23} \approx 10^{-7} \,, \qquad (1.2.3)$$

то часть корней перестанет быть вещественными, в частности появятся корни
$x_{16,\,17} \approx 16.731 \pm i\ 2.813$.

Полученный при этом так называемый возмущенный многочлен будет иметь следующие корни (ограничимся записью трех цифр после запятой).

Таблица 1.1. Корни возмущенного полинома Уилкинсона с использованием double–формата

Вещественные корни	Комплексные корни
$x_1 \approx 1.000$, $x_2 \approx 2.000$, $x_3 \approx 3.000$, $x_4 \approx 4.000$, $x_5 \approx 5.000$, $x_6 \approx 6.000$, $x_7 \approx 7.000$, $x_8 \approx 8.007$, $x_9 \approx 8.917$,	$x_{10,\,11} \approx 10.095 \pm 0.644i$, $x_{12,\,13} \approx 11.794 \pm 1.652i$, $x_{14,\,15} \approx 13.992 \pm 2.519i$, $x_{16,\,17} \approx 16.731 \pm 2.813i$, $x_{18,\,19} \approx 19.502 \pm 1.940i$, $x_{20} \approx 20.847$.

Представляется важным отметить, что решение рассматриваемого уравнения на базе стандартного типа float также характеризуется наличием комплексных корней.

Таблица 1.2. Корни возмущенного полинома Уилкинсона с использованием float–формата

Вещественные корни	Комплексные корни
$x_1 \approx 1.000$, $x_2 \approx 2.000$, $x_3 \approx 3.011$, $x_4 \approx 3.735$, $x_{5,6} \approx 4.381 \pm 0.995\, i$, $x_{7,8} \approx 5.337 \pm 2.402\, i$, $x_{9,10} \approx 6.827 \pm 4.177\, i$,	$x_{11,12} \approx 12.503 \pm 7.974\, i$, $x_{13,14} \approx 9.071 \pm 6.095\, i$, $x_{15} \approx 15.334$, $x_{16} \approx 26.539$, $x_{17,18} \approx 17.588 \pm 8.730\, i$, $x_{19,20} \approx 23.483 \pm 6.426\, i$

При этом важно заметить, что появление комплексных корней в данном случае совершенно не связано с возмущением в коэффициенте при x^{19}, т.к. величина возмущения при сложении со значением коэффициента оказывается в зоне нечувствительности машины, что наглядно демонстрируется путем построения системы фактор-классов $\{F_i\}$ множества машинных чисел, отвечающих формату *float* [15].

1.3. Обобщенное описание метода Хичкока для вычисления корней полинома Уилкинсона

Метод Хичкока относится к особой, и, как представляется, наиболее эффективной, группе методов, основанных на итерационном понижении порядка уравнения с помощью выделения полинома второй степени (квадратичного множителя) (методы Лина, Берстоу, Хичкока и т.д.). (В качестве базового метода далее принят метод Хичкока.

$$P_{20}(x) = \prod_{1}^{10} P_2(x). \qquad (1.2.4)$$

Именно с его использованием получены все приведенные выше результаты. Теоретической основой методов данной группы методов является теорема Безу, согласно которой остаток от деления при выделении корней исходного многочлена равен нулю (более подробно см., например, [5, 6, 7, 8]).

1.4. Проблемы прямого и обратного анализа исследования парадокса Уилкинсона

Особенности формулировки ill-conditioned polynomials

Особенности формулировки *ill-conditioned polynomials* в данном исследовании характеризуются как изменение семантических свойств полинома Уилкинсона, определяемых изменением семантических свойств его корней при возмущениях коэффициентов полинома.

Использование (1.2.4), не изменяющее, что очень важно, существа (1.1.1), позволяет свести исследование семантического разрыва между теоретической и машинной арифметикой, к исследованию семантических последовательно выделяемых $P_2(x)$.

В силу априорных свойств полинома Уилкинсона, свидетельствующих, вообще говоря, об отсутствии математической сингулярности в проблеме парадокса Уилкинсона, представляется важным отметить, что для полинома Уилкинсона, представляющего полином с вещественными коэффициентами и вещественными корнями, при возмущениях измененные корни ограничиваются лишь вещественными и комплексными корнями.

К. использованию априорных методов оценки ошибок округления для анализа семантических свойств полинома Уилкинсона

Решение этих проблем в такой постановке обеспечивается априорными методами оценивания ошибок округления, для чего необходимо лишь разработать адаптивные формы система оценки эффективности методов и алгоритмов решения основной задачи – вычисления корней полинома с существенным использованием априорной информации.

Выводы

Подходы к решению проблемы (парадокса) Уилкинсона на основе метода Хичкока, не решая связанных с проблемой задач прямого и обратного анализа «по существу», приводят лишь к констатации факта изменения семантических свойств полинома.

Реальной альтернативой традиционным формам метода Хичкока для вычисления корней полинома Уилкинсона представляется построение адаптивных вариантов с использованием априорных методов оценки погрешности округления. Для их построения адаптивного варианта метода Хичкока необходимо решить ряд задач

1. Исключить влияние погрешностей преобразования полинома Уилкинсона к классической форме (задача прямого анализа);
2. Определить семантически значимые параметры, сохранение которых обеспечивает решение проблемы;
3. Разработать модифицированную (адаптивную) форму принятого за основу метода Хичкока;
4. Построить методику (план) проведения вычислительных экспериментов (ВЭ) для выявления и регистрации семантически значимой информации;
5. Анализ результатов ВЭ на базе адаптивной формы принятого за основу метода.

2. Математические основы адаптивного варианта метода Хичкока решения полинома Уилкинсона (Background)

В данном разделе развивается, разрабатываются математические основы адаптивного варианта метода Хичкока. Для реализации обратной, адаптивной связи использованы априорные методы, обеспечивающие в отсутствие математической сингулярности, решение парадокса Уилкинсона.

2.1. Определение семантически значимых параметров полинома второго порядка

Определение семантически значимых параметров в методе Хичкока для полинома Уилкинсона, исходя из (1.2.4), адекватно семантически значимым параметрам выделяемых квадратичных форм. Как известно, изменение семантических свойств квадратичных форм соответствует изменению знака дискриминанта формы, сохранение которых обеспечивает решение проблемы

Не умаляя общности исследование семантических свойств полинома второго порядка

$$P_2(x)=\sum_0^2 a_i x^i, \qquad (2.2.1)$$

может быть проведено на альтернативной форме полинома

$$P_2(x)=(x-a)^2+q=0, q>0, \qquad (2.2.2)$$

При этом в качестве базового исследования достаточно рассмотреть его частную форму

$$P_2(x)=x^2+q=0 \qquad (2.2.3)$$

Очевидно корни полинома (2.2.3) располагаются на мнимой оси. При $q<0$ - корни вещественные, при $q=0$ - корни совпадают (являются кратными), а при $q>0$ - корни становятся мнимыми.

Наиболее информативным представлением изменения семантических свойств функциональной зависимости (2.2.3), определяемое изменением вида корней, является ее представление трехмерном пространстве. Для этого достаточно расположить плоскость комплексных чисел горизонтально, а по вертикали отложим значения функции. Тогда отображение вещественных корней будет осуществляться:

$$y(x)=x^2+q, q\le 0, \qquad (2.2.4)$$

а отображение комплексных корней обеспечивается

$$y(x)=-(jx)^2+q, q>0. \qquad (2.2.5)$$

Выражения (2.2.4) и (2.2.5), формально представляя одно и то же выражение, отвечающее (2.2.3), поскольку $j^2=-1$, определяют графики функций, располагающихся в разных плоскостях. Действительно, с учетом того, что умножение x на мнимую единицу определяет поворот на 0.5π, функции (2.2.4) и (2.2.5) располагаются в плоскостях YOX и $YOjX$, вещественной и мнимой соответственно.

Для квадратного полинома общего вида

$$(x-a)^2+q=0, q>0, \qquad (2.2.6)$$

$$(x-a)^2+q=0, q\le 0, \qquad (2.2.7)$$

мнимая плоскость будет смещена параллельно $YOjX$ на a.

Комплексные корни функциональной зависимости $P_2(x)$ общего вида, представленной на рис. 1,

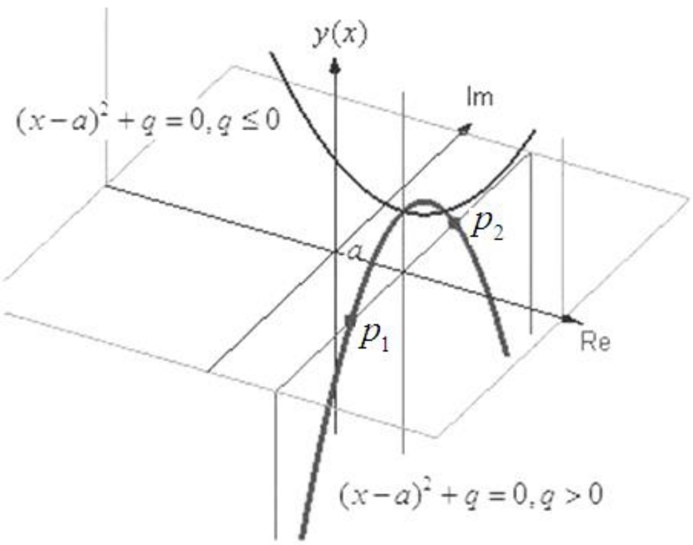

Рис. 1. Функциональные зависимости $P_2(x)$ общего вида

при изменении семантики $P_2(x)$, определяемой знаком q, представлены на рис. 2.

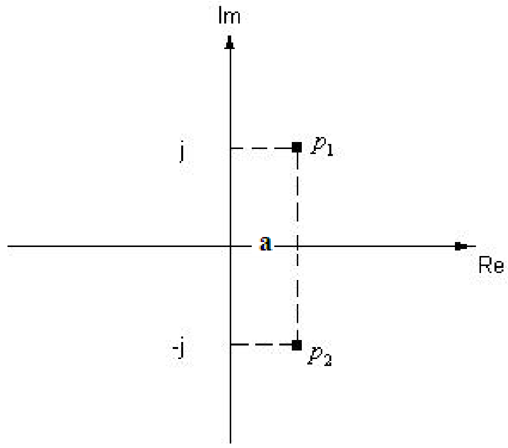

Рис. 2. Комплексные корни $P_2(x)$ *общего вида*

2.2. Априорные методы оценки ошибок округления как математическая основа адаптивной «настройки» полинома второго порядка

В отсутствие математической сингулярности полинома Уилкинсона, следующей из свойств (1.1.2), для устранения вычислительной сингулярности $P_2^k(x)$ в рамках текущего состояния k - го шага итерационного процесса Хичкока необходимо (и достаточно) провести «настройку» FPN_k - формата для сохранения «положительности» $D_k > 0$ с помощью конечной полиномиальной $P_{k,l}$ формы задания FPN_k,

$$FPN_k = \{P_{k,l}\}, \qquad (2.2.8)$$

одновременно (априорно) определяющей погрешность округления для k - го шага итерационного процесса

$$re_k = 2^{k-m+1}. \qquad (2.2.9)$$

(подробнее, см. [15].)

2.3. Выводы

Семантически значимые параметры полинома Уилкинсона в методе Хичкока определяются совокупностью семантически значимых параметров выделяемых квадратичных форм.

В отсутствие математической сингулярности полинома Уилкинсона изменение семантических свойств полинома определяется вычислительной сингулярностью, устранение которой может быть выполнено в реальном времени на основе настройки конечных полиномиальных форм представления числовой информации.

Функциональная зависимость $P_2^k(x)$ квадратичных форм итерационного процесса Хичкока, рассматриваемые в трехмерном пространстве, имеют две составляющие, в полной мере характеризуемые семантическими свойствами уравнения второго порядка.

При изменении семантических свойств $P_2^k(x)$ происходит «опрокидывание» и поворот дополняющей составляющей зависимости, что дает необходимую и достаточную информацию для построения адаптивной обратной связи в алгоритме Хичкока и решения *ill-conditioned Wilkinson's polynomial*, описанных в терминах конечных полиномиальных форм (КПФ). Эта почти тривиальная идея оказывается намного более мощной, чем выглядит, позволяя избавиться от деталей компьютерной FBA-арифметики: ошибки, сделанные в ходе вычисления, интерпретируются в единых терминах КПФ и эквивалентных возмущений в заданной задаче, и ошибок округления, и вычисляемых величин, равно, как и ошибок входных данных. Более того, совокупность $\{P_{k,l}\}$ позволяет учитывать в оценке ошибки вклад алгоритма из вклада задачи, не накладывая ограничений на выбор возмущений по данным задачи и одновременно проблемы предоставляя большую гибкость в анализе чувствительности.

3. Проведение вычислительных экспериментов на базе адаптивной формы метода Хичкока

3.1. Первая задача прямого анализа

Оценка погрешностей коэффициентов полинома Уилкинсона при видовых преобразованиях

$$P_{20}(x)=\prod_{1}^{20}(x-i)\to P_{20}(x)=\sum_{i=0}^{i=20}\alpha_i x^i \qquad (3.1.1)$$

Цель - оценить влияние изменения коэффициентов полинома Уилкинсона при видовых преобразованиях в стандартизованных форматах: - приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Погрешность округления для стандартного типа double при видовых преобразованиях полинома Уилкинсона (для начальных значений коэффициентов многочлена!)

Коэффициент	Истинное значение	Значение после округления	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность, %
a_{13}	-311333643161390640	-311333643161390590	50	$0.16\cdot 10^{-13}$
a_{14}	1206647803780373360	1206647803780373200	160	$0.13\cdot 10^{-13}$
a_{15}	-3599979517947607200	-3599979517947607000	200	$0.56\cdot 10^{-14}$
a_{16}	8037811822645051776	8037811822645051400	376	$0.47\cdot 10^{-14}$
a_{17}	-12870931245150988800	-12870931245150988000	800	$0.62\cdot 10^{-14}$

Чтобы исключить влияние этих отклонений на результат решения уравнения, дальнейшее исследование осуществляются на базе форматов адаптируемых к диапазону обрабатываемых величин, (в отличие от традиционного подхода адаптация проводится в реальном времени).

В ходе вычислительных экспериментов было установлено, что в отсутствие возмущения при x^{19} значения корней уравнения, совпадающие с истинными значениями при округлении результатов решения до шестого знака после запятой, могут быть получены при следующих условиях:

- погрешность представления операндов не должна превышать величины 2^{42};
- допустимая погрешность итерационного процесса в процедуре выделения квадратичного множителя методом Хичкока должна быть меньше величины 2^{19}.

Отметим, что в силу априорности оценки ошибок округления, если угодно, метрологического автосопровождения итерационного процесса, генерация новой информации о вычислительном процессе, связанная с анализом - оценкой семантических изменений полинома и, соответственно, адаптация формата, проводилась в реальном времени. Данные дополнения итерационного процесса, обеспеченные введением в его контекст изменения формата данных позволяют квалифицировать его как адаптивный вариант итерационного процесса Хичкока. Такая модификация итерационного процесса позволяет выявлять природу сингулярности процесса – свойства оператора или вычислительная, а также сопоставлять алгоритмы по эффективности, что особенно важно при построении программно-технических решений реального времени. Как уже отмечалось выше, данные исследования проводились как при наличии, так и при *отсутствии возмущений* в коэффициентах полинома Уилкинсона.

3.2. Результаты вычислительных исследований при варьировании стандартизованных форматов в $P_{k,l}$ - формах

Семантика варьирования стандартизованных форматов в $P_{k,l}$ - формах определяется необходимостью исследования семантических свойств итерационного процесса Хичкока как в стандартном, классическом, так и в адаптивном, так варианте. Варьирование форматов проводилось в соответствии с (2.2.7), (2.2.8).

Демонстрируя *результат увеличения процессорной составляющей* погрешности, следует обратить внимание на то, что при повышении погрешности представления погрешность итераций также возрастает, т.к. достижимый предел сходимости полностью определяется текущим форматом.

С учетом указанного обстоятельства, в эксперименте принята допустимая погрешность итераций до 2^{-10}, что для удовлетворительной погрешности представления операндов (которую мы в данном случае и будем определять) обеспечивает совпадение значений корней с истинными значениями при округлении результатов решения до второго знака после запятой, а также исключает ситуацию антипереполнения на этапе расчета.

При моделировании получены зависимости значений дискриминанта квадратичного множителя, выделяемого на каждом шаге решения, от значения погрешности представления (табл. 3.2). Значения дискриминанта сразу определяют наличие или отсутствие комплексных корней.

Таблица 3.2. Зависимость значений дискриминанта квадратичного множителя от погрешности представления операндов при допустимой погрешности итераций до 2^{-10}

Погрешность представления	**Значения дискриминанта для соответствующих пар корней**									
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
2^{-128}	1.000000	1.000000	0.999999	0.999993	0.999979	0.999967	0.999964	0.999980	0.999996	1.000000
2^{-64}	1.000000	1.000000	0.999999	0.999993	0.999979	0.999967	0.999964	0.999980	0.999996	1.000000
2^{-40}	1.000000	1.000000	0.999999	0.999994	0.999982	0.999971	0.999968	0.999981	0.999996	1.000000
2^{-30}	1.000000	1.000003	1.000087	1.000666	1.001973	1.002591	1.001602	1.000468	1.000061	1.000003
2^{-20}	0.999992	1.003050	1.097365	171.688312	-0.09953	-1.07243	-1.07320	-0.06807	0.768670	0.985522

Очевидно, что увеличение погрешности представления операндов (т.е. процессорной составляющей погрешности) до уровня 2^{-20} при ограничении погрешности итераций величиной 2^{-10} приводит к появлению комплексных корней. Уменьшение погрешности представления до уровня 2^{-30} уже обеспечивает правильное решение. Данные таблицы показывают, что начиная с некоторой определяемой экспериментально величины уменьшение погрешности представления не вызывает никаких изменений (одинаковое решение для погрешности 2^{-64} и 2^{-128}), следовательно, дальнейшее наращивание разрядности ВУ избыточно.

3.3. Исследование областей сохранения семантических свойств P_2^k-полиномов (по шагам итерационного процесса Хичкока)

Результаты погрешности шагов итерационного процесса Хичкока, или -погрешности итераций для исследования областей сохранения семантических свойств полинома Уилкинсона. При исследовании погрешности итераций можно применить аналогичный подход: изменять погрешность итераций при фиксированном значении погрешности представления. Результаты вычислительных экспериментов (моделирования), представляющие зависимость дискриминанта квадратичного множителя от погрешности итераций метода Хичкока, приведены ниже (табл. 3.3).

Таблица 3.3. Зависимость значений дискриминанта квадратичного множителя от погрешности итераций метода Хичкока для погрешности представления 2^{-64}

Погрешность итераций	Значения дискриминанта для соответствующих пар корней									
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
2^{-20}	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2^{-16}	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2^{-10}	1.000000	1.000000	0.999999	0.999993	0.999979	0.999967	0.999964	0.999980	0.999996	1.000000
2^{-9}	1.000000	1.000000	0.999988	0.999796	0.998260	0.994266	0.992740	0.996535	0.999451	0.999981
2^{-8}	0.999965	0.994044	0.873652	0.253753	-0.77824	-1.09206	-0.27412	0.645469	0.965806	0.999276

Как следует из приведенных данных, увеличение погрешности итераций до величины 2^{-8} при фиксированной погрешности представления операндов 2^{-64} приводит к появлению трех пар комплексных корней. Уменьшение погрешности итераций до уровня 2^{-9} обеспечивает правильный результат. Начиная с некоторой величины (в данном случае 2^{-16}) уменьшение погрешности итераций уже не вызывает изменений в решении.

Возвращаясь *к моделированию при наличии возмущения* при x^{-19}, отметим гораздо большую сложность оценки влияния различных составляющих погрешности, т.к. необходимо исследовать взаимосвязь уже не двух, а трех факторов. На первый взгляд, наличие и величина возмущения полностью определяют получаемый результат при заданных характеристиках метода и процессорной составляющей. Ниже приведены данные зависимости количества пар комплексных корней от значения возмущающей величины (табл. 4).

Таблица 4. Зависимость количества пар комплексных корней от возмущающей величины

	Значения возмущающей величины												
	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}
Кол-во пар	0	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8

3.4. Выводы

Осуществление компьютерного моделирования с использованием адаптивной формы итерационного метода Хичкока позволяет:

- определять наименьшее значение, после которого понижение уровня погрешностей практически не влияет на получаемый результат.
- выявлять природу сингулярности процесса – свойства оператора или вычислительная, а также
- сопоставлять алгоритмы по эффективности, что особенно важно при построении программно-технических решений реального времени.

Метод может быть использован как в информационно-измерительных, так и высокоточных управляющих системах реального времени.

Полномасштабное исследование возмущений всех коэффициентов полинома Уилкинсона позволило получить и исследовать реальные свойства устойчивости исследуемого полинома и предельные границы значимых. Так, радикальное понижение погрешностей до величины 2^{-150} и даже до величины 2^{-400} составляющих погрешности не привело к сколько-нибудь заметным изменениям в решении при наличии возмущения.

Несмотря на это однозначно утверждать, что при возмущении ряда коэффициентов радикально изменяются свойства многочлена, а получаемое решение не зависит от метода решения и используемого процессора, нельзя без дополнительного исследования.

В частности, представляется необходимым уточнить характер сходимости итерационного процесса для коэффициентов квадратичного множителя с точки зрения обеспечения нулевого остатка при последующем делении многочленов.

Заключение и обсуждение

Построенная модель адаптивного варианта метода Хичкока для вычисления корней полинома Уилкинсона инвариантна относительно полиномиальных уравнений и обеспечивает разделение и раздельное исследование вычислительных и методических ошибок и, самое главное, обеспечивает выявление реальных свойств полиномиальных моделей.

И может быть использована как для итерационных и иных вычислительных процессов, так и в вычислительных экспериментах, математическом моделировании, системах автоматизированного проектирования.

В работе впервые проведено сопоставление результатов для различных моделей float-процессоров, выявлены характерные особенности соответствующих решений, исследована зависимость решения от значения возмущающей величины, позволяющая выявлять природу сингулярности процесса – свойства оператора или вычислительная, а также сопоставлять алгоритмы по эффективности, что особенно важно при построении программно-технических решений реального времени.

В качестве направления дальнейшей проработки данной темы можно обозначить теоретическое и практическое исследование свойств возмущенного многочлена, сопоставление и подробное изучение результатов для различных методов, а также установление более строгих взаимосвязей всех составляющих полной погрешности.

Список литературы / References

1. *Wilkinson J.H.,* 1959. The evaluation of the zeros of ill-conditioned polynomials. Part I. Numerische Mathematik 1:150–166.
2. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Изд-во «Наука», 1970. 565 с.
3. *Воеводин В.В.* Параллельные вычисления. СПб. БХВ. Петербург, 2002. 608 с.
4. *Петров Ю.П., Петров Л.Ю.* Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. 4-е изд., перераб. и доп. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
5. *Ильин В.П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М., 1995.
6. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. Наука, 1977. 304 с.
7. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1962. Т. 2.
8. *Амосов А.А. и др.* Вычислительные методы для инженеров: учебное пособие. М.: Высшая школа,1994.
9. *Higham D.J. and Higham N.J.* Backward error and condition of structured linear systems, SIAMJ. Matrix Anal. Appl.13, 1992. Pp. 162–175.
10. *Gu M.* Backward perturbation bounds for linear least squares problems, SIAMJ. Matrix Anal. Appl. 20, 1998). Pp. 363–372.
11. *Malyshev A.N. and Sadkane M.* Computation of optimal backward perturbation bounds for large sparse linear least squares problems. BIT. 41, 2002. Pp. 739–747.
12. *Слюсаренко А.С.* Нетрадиционные алгоритмы обработки измерительной информации // Сб. трудов Первой научно-практической конференции «Исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности», Россия. Санкт-Петербург. 30 мая - 2 июня. Санкт-Петербург: ИОА РАН, 2005. С. 48-59.
13. *Ильин В.П.* Вычислительная математика и информатика: мировые вызовы и российская «дорожная карта». Вестник Российской Академии Наук, 2015. Том 85. № 2. С. 107-114.
14. W. Kahan Desperately Needed Remedies for the Undebuggability of Large Floating-Point Computations in Science and Engineering. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://people.eecs.berkeley.edu/~wkahan/Boulder.pdf/ (дата обращения: 12.07.2018).
15. *Slyusarenko A.S.* To the Problem of Rounding Errors Evaluation / International Scientific Review of Problems and Prospects of Modern Science and Education / Collection of Scientific Articles. XlV International Correspondence Scientific and Practical Conference (Boston. USA. May 24-25, 2018). Pp. 12–26.