PRACTICAL APPLICATION OF COMBINATORICS

Kabardov A.S.[1], Pazova Z.I.[2], Archakova Z.M.[3], Tapov A.A.[4], Afanasyeva G.A.[5], Nagoyev A.Kh.[6] (Russian Federation) Email: Kabardov546@scientifictext.ru

[1]Kabardov Aslan Sosrukovich - Student,
DEPARTMENT OF INFORMATICS AND COMPUTER ENGINEERING,
INSTITUTE OF INFORMATICS, ELECTRONICS AND COMPUTER TECHNOLOGY;
[2]Pazova Zalina Igorevna - Student;
[3]Archakova Zalina Mukhtarovna - Student,
DEPARTMENT ARCHITECTURAL DESIGN, DESIGN AND ARTS AND CRAFTS;
[4]Tapov Asker Ahmedovich – Master,
DEPARTMENT BUILDING STRUCTURES AND MECHANICS,
INSTITUTE OF ARCHITECTURE, CONSTRUCTION AND DESIGN
KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSIT,
NALCHIK;
[5]Afanasyeva Galina Andreevna - Student,
HOSPITALITY, TOURISM AND SPORTS DEPARTMENT, FACULTY OF HOTEL AND RESTAURANT, TOURISM AND SPORTS INDUSTRY,
FEDERAL STATE BUDGET EDUCATIONAL INSTITUTION OF HIGHER PROFESSIONAL EDUCATION
RUSSIAN ECONOMIC UNIVERSITY NAMED AFTER G.V. PLEKHANOV, MOSCOW;
[6]Nagoyev Alan Khabievich - Student,
DEPARTMENT RADIOPHYSICS,
INSTITUTE OF INFORMATICS, ELECTRONICS AND COMPUTER TECHNOLOGY
KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSITY, NALCHIK

Abstract: *combinatorics can be applied to scheduling in schools and colleges, and we will conclude our work with a simple example from this area. In the college there are M teachers L1, L2, ..., LM and N students of the last course U1, U2, ..., UN. Teacher Li should give Uj-mu to the student for a year a one-hour consultation with a total of qij. The staff of the college is perfectly staffed, and no teacher ever has to deal with more than one student at once. These requirements can be expressed using an M × N-matrix Q whose elements are qij. The task is to determine the least number of hours h, for which you can consult [1].*
Keywords: *mathematics, combinatorics, programming.*

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ КОМБИНАТОРИКИ

Кабардов А.С.[1], Пазова З.И.[2], Арчакова З.М.[3], Тапов А.А.[4], Афанасьева Г.А.[5], Нагоев А.Х.[6] (Россиийская Федерация)

[1]Кабардов Аслан Сосрукович – студент,
кафедра информатики и вычислительной техники,
Институт информатики, электроники и компьютерных технологий;
[2]Пазова Залина Игоревна – студент;
[3]Арчакова Залина Мухтаровна – студент,
кафедра архитектурного проектирования, дизайна и декоративно-прикладного искусства;
[4]Тапов Аскер Ахмедович – магистр,
кафедра строительных конструкций и механики,
Институт архитектуры, строительства и дизайна
Кабардино-Балкарский государственный университет
г. Нальчик;
[5]Афанасьева Галина Андреевна – студент,
кафедра индустрии гостеприимства, туризма и спорта, факультет гостинично-ресторанной, туристической и спортивной индустрии,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, г. Москва;
[6]Нагоев Алан Хабиевич – студент,
кафедра радиофизики,
Институт информатики, электроники и компьютерных технологий
Кабардино-Балкарский государственный университет,
г. Нальчик

Аннотация: *комбинаторику можно применить к составлению расписаний в школах и колледжах и мы завершим нашу работу простым примером из этой области. В колледже имеется M преподавателей L_1, L_2, ..., L_M и N студентов последнего курса U_1, U_2, ..., U_N. Преподаватель L_i должен давать U_j-му студенту в течение года одночасовые консультации общим количеством q_{ij}. Штат колледжа*

прекрасно укомплектован, и ни одному преподавателю никогда не приходится заниматься более чем с одним студентом сразу. Эти требования можно выразить с помощью M×N-матрицы Q, элементами которой являются q_{ij}. Задача состоит в определении наименьшего числа часов h, за которые можно провести консультации [1].
Ключевые слова: *математика, комбинаторика, программирование.*

Комбинаторику можно применить к составлению расписаний в школах и колледжах, и мы завершим нашу работу простым примером из этой области. В колледже имеется M преподавателей L_1, L_2, …, L_M и N студентов последнего курса U_1, U_2, ..., U_N. Преподаватель L_i должен давать U_j-му студенту в течение года одночасовые консультации общим количеством q_{ij}. Штат колледжа прекрасно укомплектован, и ни одному преподавателю никогда не приходится заниматься более чем с одним студентом сразу. Эти требования можно выразить с помощью M×N-матрицы Q, элементами которой являются q_{ij}. Задача состоит в определении наименьшего числа часов h, за которые можно провести консультации [1].

Теперь преподаватель Li должен дать всего $l_i=\sum_{j=1}^{N} q_{ij}$ консультации, так что h должно быть не меньше, чем наибольшее из чисел l_i для $1 \le I \le M$. Точно так же студент U_j должен посетить всего $u_j = \sum_{i=1}^{M} q_{ij}$ консультаций, так что h должно быть не меньше, чем наибольшее из чисел u_j для $1 \le i \le N$. Отсюда следует, что h должно быть не меньше, чем наибольшая из этих двух величин, т. е. $h \ge S(Q)$, где S(Q) — наибольшая *строчная сумма* матрицы Q. Под «строчной суммой» мы понимаем сумму всех элементов матрицы, находящихся на одной линии, т.е. в одной строке или в одном столбце. Таким образом, M×N-матрица будет иметь M+N строчных сумм, а S(Q) — наибольшая из них [2].

Мы показали, что расписание с необходимостью требует, по меньшей мере, <S(Q) часов. Интересно, что S(Q) в действительности оказывается и достаточным. Доказательство представляет прямое следствие некоторых известных теорем комбинаторики. Одна из них утверждает, что Q можно представить в виде суммы S(Q) матриц специального вида, известных как Z-матрицы (матрицы, в которых максимум один элемент в каждой линии (строке или столбце) равен 1, а все остальные — 0), т.е.

$$Q = Z_1+Z_2+ \ldots + Z_S, \quad (1)$$

где индекс s записан вместо S(Q) [3].

Каждую такую матрицу, скажем Z_h, можно толковать как расписание для k-го часа. Преподаватель L_i должен консультировать студента U_j в этот час в том и только в том случае, если (i, j)-й элемент Z_k равен 1. Это определение Z-матриц совместимо с требованиями нагрузки. Полное число консультаций, данных преподавателем L_i студенту U_j, равно числу единиц, которые стоят на (/, /)-м месте во множестве этих матриц. Уравнение (1) показывает, что оно равно q_{ij}, а потому всем нашим требованиям можно удовлетворить за s = S(Q) часов. Оказывается, что тривиальная нижняя граница для h является фактическим значением h [4].

Рассмотрим в качестве несложной численной иллюстрации случай для трех преподавателей и пяти студентов. Матрица Q, определяющая их обязанности, имеет вид:

Таблица 1. Матрица Q

	U1	U2	U3	U4	U5	Суммы по строкам
L1	2	0	3	1	0	6
L2	1	1	3	0	2	7
L3	3	0	1	2	0	6
Суммы по столбцам	6	1	7	3	2	

Так, преподаватель L_1 должен дать две консультации студенту U_1 три — студенту U_3, одну— U_4 и ни одной студентам U_2 и U_5. Видно, что наибольшая строчная сумма равна 7 (она встречается дважды), и наша теорема гарантирует, что Q-матрица может быть представлена в виде суммы семи Z-матриц. Одно из таких разложений (существует масса других) таково:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это разложение показывает, что консультации можно провести за 7 часов, а каждого человека снабдить фактическим расписанием. Так, на пятом часу преподаватель L_1 консультирует студента U_3, L_2 — студента U_1, тогда как преподаватель L_3 может вздремнуть, а студенты U_2, U_4 и U_5 — поработать в библиотеке или отдохнуть в студенческом клубе! Несмотря на то, что этот пример слишком прост, чтобы иметь практическое значение, он дает некоторое представление о том, как можно использовать комбинаторику для решения «реальных» проблем [5].

Список литературы / References

1. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
2. *Холл М*. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
3. *Райзер Г.Дж.* Комбинаторная математика. М.: Мир, 1966.
4. *Риордан Дж*. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963.
5. *Кофман А*. Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975.