STOCHASTIC PROBLEMS

Kabardov A.S.[1], Khuranova L.Z.[2], Kravtsova T.A.[3], Rodin A.N.[4], Gobozov T.S.[5], Tkhamokova A.A.[6] (Russian Federation) Email: Kabardov543@scientifictext.ru

*[1]Kabardov Aslan Sosrukovich – Student,
DEPARTMENT OF INFORMATICS AND COMPUTER ENGINEERING;
[2]Khuranova Liana Zaurovna – Student,
DEPARTMENT "MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS"
INSTITUTE OF INFORMATICS, ELECTRONICS AND COMPUTER TECHNOLOGIES,
KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSITY;
[3]Kravtsova Tatyana Anatolyevna – Student,
DEPARTMENT OF TECHNOLOGY OF PUBLIC CATERING AND CHEMISTRY PRODUCTS;
[4]Rodin Anton Nikolaevich – Student,
DEPARTMENT TECHNOLOGY OF PRODUCTION AND ORGANIZATION OF PUBLIC CATERING, TRADE AND TECHNOLOGY FACULTY,
KABARDINO-BALKARIAN AGRARIAN UNIVERSITY;
[5]Gobozov Timur Stanislavovich – Student,
DEPARTMENT INFORMATION SECURITY,
INSTITUTE OF INFORMATICS, ELECTRONICS AND COMPUTER TECHNOLOGIES;
[6]Tkhamokova Alina Anzorovna – Student,
DEPARTMENT PRIMARY AND PRESCHOOL EDUCATION,
INSTITUTE OF PEDAGOGY, PSYCHOLOGY, AND PHYSICAL EDUCATION EDUCATION,
KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSITY,
NALCHIK*

Abstract: *stochastic problems are problems where the principle of optimality is possible in situations involving uncertainty.*
Suppose we sell a house and get one offer every day. We can either accept it (then the process ends), or reject it; in the latter case, the next day we will receive a new offer. Suppose also that we know that if on the tenth day the house is still not sold, we can not postpone its sale any more, and we must accept the offer that came on this day. What strategy do we need to adhere to, so that the expected revenue from this sale is maximized? (By the term "expected income" we mean "statistical expectation")
Keywords: *dynamic programming; decision theory; stochastic problems.*

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Кабардов А.С.[1], Хуранова Л.З.[2], Кравцова Т.А.[3], Родин А.Н.[4], Гобозов Т.С.[5], Тхамокова А.А.[6] (Российская Федерация)

*[1]Кабардов Аслан Сосрукович – студент,
кафедра информатики и вычислительной техники;
[2]Хуранова Лиана Зауровна – студент,
кафедра управления в технических системах,
Институт информатики, электроники и компьютерных технологий,
Кабардино-Балкарский государственный университет;
[3]Кравцова Татьяна Анатольевна – студент,
кафедра технологии продуктов общественного питания и химии;
[4]Родин Антон Николаевич – студент,
кафедра технологии продукции и организация общественного питания, торгово-технологический факультет
Кабардино-Балкарский агарный университет;
[5]Гобозов Тимур Станиславович – студент,
кафедра информационной безопасности,
Институт информатики, электроники и компьютерных технологий;
[6]Тхамокова Алина Анзоровна – студент,
кафедра начального и дошкольного образования,
Институт педагогики, психологии, и физкультурно-образовательного образования
Кабардино-Балкарский государственный университет,
г. Нальчик*

Аннотация: *стохастическими задачами называются задачи, где возможно применение принципа оптимальности в ситуациях, связанных с неопределенностью.*
Предположим, что мы продаем дом и каждый день получаем одно предложение. Его мы можем либо принять (тогда процесс заканчивается), либо отвергнуть; в последнем случае на следующий день мы получим новое предложение. Предположим также, что нам известно, что если на десятый день дом

все еще не будет продан, откладывать его продажу мы больше не можем, и должны принять предложение, поступившее в этот день. Какой стратегии нам нужно придерживаться, чтобы ожидаемый доход от этой продажи был максимальным? (Под термином «ожидаемый доход» мы понимаем «статистическое ожидание»)

Ключевые слова: *динамическое программирование; теория решении; стохастические задачи.*

Стохастическими задачами называются задачи, где возможно применение принципа оптимальности в ситуациях, связанных с неопределенностью.

Предположим, что мы продаем дом и каждый день получаем одно предложение. Его мы можем либо принять (тогда процесс заканчивается), либо отвергнуть; в последнем случае на следующий день мы получим новое предложение. Предположим также, что нам известно, что если на десятый день дом все еще не будет продан, откладывать его продажу мы больше не можем, и должны принять предложение, поступившее в этот день. Какой стратегии нам нужно придерживаться, чтобы ожидаемый доход от этой продажи был максимальным (под термином «ожидаемый доход» мы понимаем «статистическое ожидание») [1]?

Очевидно, что величина этого ожидаемого дохода зависит от двух обстоятельств—числа оставшихся дней, в которые еще можно принять какое-то решение, и распределения вероятностей предложений по дням. Предположим для простоты, что это распределение дискретно, не меняется день ото дня, предлагаемые цены кратны 1000 фунтам стерлингов, а его вид задается табл. 1.

Таблица 1. Распределение предлагаемых цен

Предлагаемая цена s, фунтов стерлингов	**Вероятность, что будет предложена цена s фунтов стерлингов, p(s)**
20 000	0,4
21 000	0,2
22 000	0,2
23 000	0,2

Поступая, как обычно, обозначим $f_n(s)$ ожидаемый доход, если: а) предлагается цена s фунтов стерлингов; б) домовладелец следует оптимальной политике; в) остается еще n дней, в которые могут поступить предложения. Теперь предположим, что предложение x фунтов стерлингов получено. Если человек, продающий дом, принимает его, то он получает x фунтов стерлингов; если он его отвергает, то ожидаемый от позднейших предложений доход дается выражением

$$\sum f_{n-1}(s)p(s),$$

где суммирование проводится по множеству всех возможных значений s. [2] Таким образом, коротко можно записать:

$f_n(x) = \max\ [x; \sum_s f_n(s)p(s)]$. (1)

Кроме того, у нас имеется граничное условие: домовладелец, дотянувший дело до последнего дня, теряет право выбора и должен принять любую предложенную в этот день цену. А это значит:

$f_0(x)=x$. (2)

Теперь можно поочередно вычислить значения членов последовательности $f_n(x)$ для n=1, 2, 3, ...Мы находим, что

$$f_1(x) = \max[x; \{0{,}4f_0(20000) + 0{,}2f_0(21000) + 0{,}2f_0(22000) + 0{,}2f_0(23000)\}]$$
$$= \max[x; \{0{,}4 * 20000 + 0{,}2 * 21000 + 0{,}2 * 22000 + 0{,}2 * 23000\}] = \max[x; 21200]$$

Это означает, что если остался только один день, домовладелец должен принять предлагаемую ему в этот день цену, если она больше 21 200 фунтов стерлингов, и отказаться от нее, если она меньше. [3] Эти решения можно представить в виде таблицы:

Таблица 2. Решения

x	**f_1(x)**	**Решение**
20000	21200	Отказаться
21000	21200	Отказаться
22000	22000	Согласиться
23000	23000	Согласиться

Таким же образом находим, что

$f_2(x) = \max[x; \{0{,}4f_1(20000) + 0{,}2f_1(21000) + 0{,}2f_1(22000) + 0{,}2f_1(23000)\}] = \max[x; \{0{,}4 * 21000 + 0{,}2 * 21000 + 0{,}2 * 22000 + 0{,}2 * 23000\}] = \max\ [x; 21720]$.

Что приводит к следующему:

Таблица 3. Решения

x	f_2(x)	Решение
20000	21720	Отказаться
21000	21720	Отказаться
22000	22000	Согласиться
23000	23000	Согласиться

Затем вычисляем f_3(x); оно равно max[x; 22032], а это значит, что следует принимать только максимально возможную из предлагаемых цену 23 000 фунтов стерлингов. Теперь ясно, что этого же решения нужно придерживаться и для больших значений n [4].

Полные правила принятия решения можно представить теперь в виде табл. 4.

Таблица 4. Оптимальная политика продажи дома

x	n=0	n=1	n=2	n=3 или больше
20000	Согласиться	Отказаться	Отказаться	Отказаться
21000	Согласиться	Отказаться	Отказаться	Отказаться
22000	Согласиться	Согласиться	Согласиться	Отказаться
23000	Согласиться	Согласиться	Согласиться	Согласиться

Мы намеренно упростили этот пример, чтобы отчетливее выявить характерные черты динамико-программированного подхода к стохастическим задачам. В частности, мы считали, что предлагаемая цена может принимать лишь вполне определенные значения, т. е. что наша задача дискретна. Этот метод можно легко обобщить и применить к непрерывному случаю, когда значение предлагаемой цены является случайной переменной с плотностью распределения вероятности. Читатель, знакомый с математическим анализом, поймет, что вероятность того, что предлагаемая цена находится в интервале между s_1 и s_2, можно представить интегралом $\int_{s_1}^{s_2} g(s)ds$. [5] Единственное, что здесь следует сделать, это заменить сумму $\sum f_{n-1}(s)p(s)$

в формуле (1) на интеграл вида $\int_0^\infty f_{n-1}(s)g(s)ds$. Граничное условие (2) остается без изменений. По-видимому, стоит отметить, что

$f_1(x) = \max\left[x; \int_0^\infty f_0(s)g(s)ds\right] = \max\left[x; \int_0^\infty sg\,(s)ds\right]$,

и это можно записать как $f_1(x) = \max\,[x; m]$, где m — среднее значение плотности распределения.

Список литературы / References

1 *Беллман Р.* Динамическое программирование / Р. Беллман. М.: ЁЁ Медиа, 2017. 919 с.

2 *Калихман И.Л.* Динамическое программирование в примерах и задачах. Учебное пособие / И.Л. Калихман, М.А. Войтенко. М.: Высшая школа, 2017. 128 с.

3 *Лежнёв А.В*. Динамическое программирование в экономических задачах / А.В. Лежнёв. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013. 589 с.

4 *Мэтьюз Марти*. Динамическое веб-программирование (+ CD-ROM) / Марти Мэтьюз, Джон Кронан. М.: Эксмо, 2014. 384 с.

5 *Окулов С.М.* Динамическое программирование / С.М. Окулов. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015. 598 с.