DYNAMIC PROGRAMMING

Kabardov A.S.[1], Niyazov I.A.[2], Zhabelov S.T.[3], Hokonov I.M.[4], Khuranova L.Z.[5], Akhmatov A.A.[6] (Russian Federation) Email: Kabardov543@scientifictext.ru

[1]Kabardov Aslan Sosrukovich – Student;
[2]Niyazov Ilyas Alievich - Student;
[3]Zhabelov Samat Tahirovich - Student;
[4]Hokonov Islam Mukhamedovich - Student,
DEPARTMENT OF INFORMATICS AND PROGRAMMING TECHNOLOGY;
[5]Khuranova Liana Zaurovna - Student,
DEPARTMENT MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS;
[6]Akhmatov Akhmat Anuarovich - Student,
DEPARTMENT OF INFORMATICS AND PROGRAMMING TECHNOLOGY,
INSTITUTE OF INFORMATICS, ELECTRONICS AND COMPUTER TECHNOLOGIES
KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSITY,
NALCHIK

Abstract: *let us consider the approach to the problem of nonlinear distribution and planning. This approach is known as dynamic programming and is largely a creation of one person - Richard Wellman, whose first book on this topic was published in 1957. In order to reveal the essence of dynamic programming, let us consider a simple example, taken from literature in a slightly modified form. A certain landowner has a forest plot, on which there are z tons of drillwood. In a certain year the landowner cuts down tons of tons and sells them for j (x) pounds sterling; in tons it remains to grow, so that after a year it has a dry ton (c> 1). The owner wants, that in N years all of his battle wood was sold. The question is: how to cut down year after year, so that the total revenue for the N-summer period was maximum?*

Keywords: *programming, mathematics, decision theory.*

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Кабардов А.С.[1], Ниязов И.А.[2], Жабелов С.Т.[3], Хоконов И.М.[4], Хуранова Л.З.[5], Ахматов А.А.[6] (Российская Федерация)

[1]Кабардов Аслан Сосрукович – студент;
[2]Ниязов Ильяс Алиевич – студент;
[3]Жабелов Самат Тахирович – студент;
[4]Хоконов Ислам Мухамедович – студент,
кафедра информатики и технологии программирования;
[5]Хуранова Лиана Зауровна – студент,
кафедра управления в технических системах;
[6]Ахматов Ахмат Ануарович – студент,
кафедра информатики и технологии программирования,
Институт информатики, электроники и компьютерных технологий
Кабардино-Балкарский государственный университет,
г. Нальчик

Аннотация: *рассмотрим подход к задаче нелинейного распределения и планирования. Этот подход известен как динамическое программирование и в большой степени является творением одного человека — Ричарда Веллмана, первая книга которого на эту тему была опубликована в 1957 году. Для выявления сути динамического программирования рассмотрим простой пример, взятый нами из литературы в несколько измененном виде. У некоего землевладельца имеется участок леса, на котором находится z тонн строевого леса. В некоторый год землевладелец вырубает x тонн и продает их за j(x) фунтов стерлингов; у тонн остается расти, так что через год он имеет су тонн (c> 1). Владелец хочет, чтобы через N лет весь его строевой лес был продан. Вопрос заключается в следующем: как нужно производить вырубку год от года, чтобы полный доход за N-летний период был максимален?*

Ключевые слова: *программирование, математика, теория решений.*

Рассмотрим подход к задаче нелинейного распределения и планирования. Этот подход известен как динамическое программирование и в большой степени является творением одного человека — Ричарда Веллмана, первая книга которого на эту тему была опубликована в 1957 году [1].

Эксплуатация земли

Для выявления сути динамического программирования рассмотрим простой пример, взятый нами из литературы в несколько измененном виде. У некоего землевладельца имеется участок леса, на котором находится z тонн строевого леса. В некоторый год землевладелец вырубает x тонн и продает их за j(x) фунтов стерлингов; у тонн остается расти, так что через год он имеет су тонн (c> 1). Владелец хочет, чтобы через N лет весь его строевой лес был продан. Вопрос заключается в следующем: как нужно производить вырубку год от года, чтобы полный доход за N-летний период был максимален? (Этот пример является вариантом одной из основных экономических проблем: какую часть наших доходов следует сохранять, а не тратить.) Пользуясь очевидными обозначениями, эту ситуацию можно представить в такой форме:

Таблица 1. Оптимальная стратегия

Год	Продано	Оставлено	Имеется на следующий год
1	X_1	Y_1	Cy_1
2	X_2	Y_2	Cy_2
…	…	…	…
N-1	X_{N-1}	Y_{N-1}	Cy_{N-1}
N	x_N	0	0

Таким образом, имеем:

$$\left.\begin{array}{l} z = x_1 + y_1; \\ cy_1 = x_2 + y_2; \\ cy_2 = x_3 + y_3; \\ cy_{N-2} = x_{N-1} + y_{N-1}; \\ cy_N = x_N; \end{array}\right\} \quad (1)$$

$y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$ можно исключить из этих N уравнений, что дает

$$zc^{N-1} = x_N + cx_{N-1} + \dots + c^{N-1}x_1 \qquad (2)$$

Нам нужно определить «политику» вырубки на N-летний период, которая максимизировала бы P при ограничении (2) в условиях неотрицательности:

$$P = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_N) \qquad (3)$$

Это нелинейная задача оптимизации N переменных с ограничениями. Если функция f(x) линейна или вогнута вверх, то проблема тривиальна; ясно, что тогда наилучшая политика — дать всему лесу расти до его окончательной продажи. Однако если f(x) имеет другой вид, например похожа на кривую «уменьшающейся предельной полезности», то проблема становится весьма трудной для решения ее классическими методами или методами, которые мы рассматривали до сих пор. Воспользуемся поэтому подходом Веллмана. Он сопряжен с некоторыми математическими усложнениями, но они не должны представлять, однако, серьезной трудности [2]. Определим $g_n(q)$ как полный доход владельца, который он получит, если начнет с продажи q тонн леса, пользуясь оптимальной политикой эксплуатации на n-летний период. Ясно, что $g_i(q) = f(q)$, ибо если владелец решил свернуть дело за один год, то он должен продать весь лес к концу этого года. Рассмотрим теперь $g_2(q)$. Если оптимальная политика такова, что x тонн нужно вырубить и продать к концу первого года, то мы имеем

$$g_2(q) = f(x) + \{\text{доход от с (q-x) тонн за оставшийся год}\} \qquad (4)$$

Поскольку $g_2(q)$, по определению, относится к оптимальной политике на протяжении одного года, оставшиеся c(q — x) тонн должны, очевидно, использоваться наилучшим образом. Это значит, что выражение, стоящее в фигурных скобках, должно являться функцией $g_1\{c(q-x)\}$. Это приводит к тому, что $g_2(q)=f(x) + g_i\{c(q — x)\}$, если x оптимально. Значение x будет оптимальным, когда доход за один год является максимально возможным, поэтому

$$g_2(q) = \max_{0<x<q}[f(x) + g1\{c(q — x)\}]. \qquad (5)$$

Ясно, что аргументы, которыми мы пользовались при переходе от одногодичной к двухгодичной оптимальной политике, годятся для любого периода времени, скажем, для перехода от (m-1)-годичного к m-годичному периоду [3]. Это приводит к

$$g_m(q) = \max_{0<x<q}[f(x) + g_{m-1}\{c(q-x)\}]. \qquad (6)$$

Поскольку $g_1(q)=f(q)$, это уравнение дает возможность шаг за шагом определить $g_2(q)$, $g_3(q)$, … , вплоть до $g_n(q)$.

Отметим, что мы свели задачу максимизации N переменных к последовательности простых задач максимизации, причем каждая из них содержит только одну переменную. При таком упрощении мы должны рассчитывать значения последовательности $g_m(q)$ для m— 1, 2, … не для одного значения q, но для некоторой области значений q. Происходит это потому, что мы поначалу не знаем, сколько растущего леса имеет владелец в начале каждого года после первого. Таким образом, динамикопрограммированный подход сопряжен с массой вычислений. Здесь мы снова имеем пример создания новой ветви математики, практическое применение которой было бы невозможно без использования электронных компьютеров, выполняющих «черновую» арифметическую работу [4].

Хотя динамическое программирование и находится в существенной зависимости от вычислительных методов, интересно рассмотреть пример с эксплуатацией леса алгебраическим способом. Чтобы проделать это без лишнего труда, примем очень простую и (поэтому нереалистичную) форму функции цены f(x), а именно $f(x) = r\sqrt{x}$. Эта функция удовлетворяет основным требованиям: она равна нулю при $x = 0$, ее наклон монотонно уменьшается с ростом x, оставаясь все время положительным. Таким образом, мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} g_1(q) &= f(q) = r\sqrt{q}; \\ g_2(q) &= \max_{0\le x\le q}\left[r\sqrt{x} + r\sqrt{c(q-x)}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

В данном частном случае значение x, максимизирующее выражение, можно найти, вычисляя производную от него и полагая ее равной нулю. Мы получаем

$\frac{r}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{q-x}}\right] = 0$, что дает $x = \frac{q}{1+c}$. (8)

Это значение x лежит в допустимом интервале (0, q), и можно показать, что при этом x $g_2(q)$ действительно имеет максимум. Получаем

$g_2(q) = r\sqrt{\frac{q}{1+c}} + r\sqrt{\frac{c*qc}{1+c}} = r\sqrt{q(1+c)}$. (9)

Действуя таким же образом дальше, находим, что $g_3(q) = \max_{0\le x\le q}\left[r\sqrt{x} + +r\sqrt{c(1+c)(q-x)}\right] = r\sqrt{q(1+c+c^2)}$, что достигается при $x = \frac{q}{1+c+c^2}$. (10)

Общая картина теперь ясна, а именно:

$g_n(q) = r\sqrt{q(1+c+c^2+\dots+c^{n-1})}$, что достигается при $x = \frac{q}{1+c+c^2+\dots+c^{n-1}}$. (11)

Теперь мы можем вычислить $g_m\{q)$ для любого m во всей области значений q. Однако на данном этапе мы не знаем, сколько леса (т. е. значение q) имеется у владельца к началу каждого года. Но одно из значений q нам все же известно — это первоначальный объем строевого леса. Мы знаем также значение N, а потому можем вычислить значение $g_N(z)$. Это дает максимальный доход за N-летний период. [5]

Чтобы определить оптимальную политику ежегодной вырубки леса, которая приводит к этому максимальному доходу, необходимо использовать промежуточные функции от $g_1(q)$ до $g_{N-1}(q)$, но в обратном порядке. В первый год политика определяется уравнением

$$g_N(z) = \max_{0\le x\le z}\left[f(x) + g_{N-1}\{c(z-x)\}\right]. \quad (12)$$

Если x_1 — значение x, которое удовлетворяет этому уравнению, то x_1 — количество строевого леса, которое должно быть срублено и продано в первый год N-летнего периода эксплуатации. Поэтому ко второму году владелец имеет $c(z-x_1)=z_2$ (обозначим это через z_2) тонн строевого леса на участке, и его политика во второй год определяется уравнением

$$g_{N-1}(z_2) = \max_{0\le x\le z_2}\left[f(x) - g_{N-2}\{c(z_2 - x)\}\right]. \quad (13)$$

Если x_2 — решение этого уравнения, то во второй год владелец должен продать x_2 тонн леса и оставить себе на третий год $c(z_2 — x_2)=z_3$ тонн. Чтобы прочувствовать все это, обратимся в нашей задаче к некоторым численным значениям. Пусть N = 4, z=10 000, а c = 1,1. Поскольку r — просто масштабный множитель, его можно положить равным 1. Начинаем мы с

$g_4(z) = \sqrt{z(1+c+c^2+c^3)} = 215$,

что дает значение наибольшего дохода за 4 года. Находим далее, что

$x_1 = \frac{z}{1+c+c^2+c^3} = 2150$,

т. е. за первый год владелец должен продать 2150 тонн. К началу второго года у него имеется $z_2 = c(z-x_1) = 8635$ тонн. Теперь надо решить уравнение для $g_3(q)$, где $q = z_2$. Имеем:

$g_3(z_2) = \sqrt{z_2(1+c+c^2)} = 170$;

$x_2 = \frac{z_2}{1+c+c^2} = 2610$ тонн;

$z_3 = c(z_2 - x_2) = 6625$ тонн.

Продолжая в том же духе, вычисляем $g_2(z_3)$, x_3, z_4 и в конце концов $g_1(z_4)$. Значение x_4 должно быть равно z_4, поскольку максимум $g_1(z) = r\sqrt{z}$ в интервале $(0, z_4)$ достигается при $x = z_4$.

Эти результаты объединены в табл. 2. Цифры в четвертой колонке служат для контроля: их сумма должна быть равна уже вычисленному оптимальному доходу $g_4(10\ 000)$ за четырехлетний период. Контроль подобного рода можно провести и для более коротких периодов (столбцы 4 и 5).

Таблица 2. Оптимальная политика четырехлетней эксплуатации строевого леса

Годы i	К началу года имеется z_j тонн леса	Вырубка и продажа x_j тонн	Ежегодный доход $\sqrt{x_j}$, фунтов стерлингов	Оптимальный доход за оставшиеся годы $\{g_{5-1}(z_i)\}$, фунтов стерлингов
1	2	3	4	5
1	10000	2150	46	215
2	8635	2610	51	169
3	6625	3160	56	118
4	3800	3800	62	62
		11720	215	

Список литературы / References

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование / Р. Беллман. М.: ЁЁ Медиа, 2017. 919 с. 2. Калихман, И. Л. Динамическое программирование в примерах и задачах. Учебное пособие / И.Л. Калихман, М.А. Войтенко. М.: Высшая школа, 2017. 919 с.
2. *Калихман И.Л.* Динамическое программирование в примерах и задачах. Учебное пособие / И.Л. Калихман, М.А. Войтенко. М.: Высшая школа, 2017. 128 с.
3. *Лежнёв А.В.* Динамическое программирование в экономических задачах / А.В. Лежнёв. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013. 589 с.
4. *Мэтьюз Марти*. Динамическое веб-программирование (+ CD-ROM) / Марти Мэтьюз, Джон Кронан. М.: Эксмо, 2014. 384 с.
5. *Окулов С.М.* Динамическое программирование / С.М. Окулов. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015. 598 с.