

SIMPLEX METHOD IN LINEAR PROGRAMMING

Zhabelov S.T.¹, Niyazov I.A.², Batseva A.A.³, Dygov M.M.⁴, Hokonov I.M.⁵,
Kardangushev I.Z.⁶ (Russian Federation) Email: Zhabelov541@scientifictext.ru

¹Zhabelov Samat Tahirovich – Student;

²Niyazov Ilyas Alievich – Student,

DEPARTMENT OF INFORMATICS AND PROGRAMMING TECHNOLOGY,
INSTITUTE OF INFORMATICS, ELECTRONICS AND COMPUTER TECHNOLOGIES;

³Batseva Arina Arsenovna – Student,

DEPARTMENT KABARDINO-CIRCASSIAN LANGUAGE AND LITERATURE,
INSTITUTE OF HISTORY OF PHILOLOGY AND MEDIA;

⁴Dygov Mukhamed Muzarinovich – Student,

DEPARTMENT OF INFORMATION SECURITY,
INSTITUTE OF INFORMATICS, ELECTRONICS AND COMPUTER TECHNOLOGIES;

⁵Hokonov Islam Mukhamedovich – Student,

DEPARTMENT OF INFORMATICS AND PROGRAMMING TECHNOLOGY;

⁶Kardangushev Islam Zaurbekovich – Student,

DEPARTMENT OF INFORMATION SECURITY,
INSTITUTE OF INFORMATICS, ELECTRONICS AND COMPUTER TECHNOLOGIES,
KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSITY,
NALCHIK

Abstract: the article explores possible applications of linear programming in various fields of human activity, both in the past and in modern times. It shows all the benefits of using the technology of programming these days, how they simplify and improve work in the most diverse spheres of human activity. A great place in the work is the consideration of earlier studies on the introduction of the application of linear programming into our lives. As it turned out, the use of linear programming in various spheres of human activity can significantly improve the efficiency of certain structures.

Keywords: programming, linear, Danzig, simplex method.

СИМПЛЕКС-МЕТОД В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Жабелов С.Т.¹, Ниязов И.А.², Бацева А.А.³, Дыгов М.М.⁴, Хоконов И.М.⁵,
Кардангушев И.З.⁶ (Российская Федерация)

¹Жабелов Самат Тахирович – студент;

²Ниязов Ильяс Алиевич – студент,

кафедра информатики и технологии программирования,
Институт информатики, электроники и компьютерных технологий;

³Бацева Арина Арсеновна – студент,

кафедра кабардино-черкесского языка и литературы,

Институт истории филологии и СМИ;

⁴Дыгов Мухамед Музаринович – студент,

кафедра информационной безопасности,
Институт информатики, электроники и компьютерных технологий;

⁵Хоконов Ислам Мухамедович – студент,

кафедра информатики и технологии программирования;

⁶Кардангушев Ислам Заурбекович – студент,

кафедра информационной безопасности,
Институт информатики, электроники и компьютерных технологий,
Кабардино-Балкарский государственный университет,
г. Нальчик

Аннотация: в статье исследуются возможные применения линейного программирования в различных сферах деятельности человека, как в прошлом, так и в настоящее время. Показана вся польза от использования технологий программирования в наши дни, как они упрощают и улучшают работу в самых разных сферах деятельности человека. Большое место в работе занимает рассмотрение проводившихся ранее исследований по внедрению применения линейного программирования в нашу жизнь. Как оказалось, применение линейного программирования в различных сферах деятельности человека существенно может улучшить работоспособность тех или иных структур.

Ключевые слова: программирование, линейный, Данциг, симплекс-метод.

За последние тридцать лет для решения общей задачи линейного программирования был предложен ряд алгебраических методов. Мы ограничимся простейшим из них, но наиболее широко применяемым, известным как симплекс-метод (или симплекс-алгоритм).

Дадим сначала несколько определений.

Множество значений $m+n$ переменных x_j ($j=1, 2, \dots, n$) и s_i ($i=1, 2, \dots, m$), удовлетворяющих условиям неотрицательности и уравнениям-ограничениям, называется допустимым решением [1].

Решение, которое получается, когда n переменных полагаются равными нулю (таким образом, у нас остается m уравнений с m переменными), называется базисным, а m оставшихся ненулевых переменных — базисом. Можно показать, что если система имеет допустимое решение, то она также имеет базисное допустимое решение. Обычно ищется как раз такое решение. Решение всей задачи называется оптимальным или окончательным. В большинстве практически интересных случаев оптимальное решение является одним из базисных допустимых решений. Чтобы понять суть симплекс-метода, применим его к решению нашей задачи о производстве сукна. Вводя нежесткие переменные s_1, s_2 и s_3 , мы можем сформулировать ее в виде

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + s_1 = 1400; \\ 6x_1 + 3x_2 + s_2 = 1800; \\ 2x_1 + 6x_2 + s_3 = 1800; \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

при этом требуется, чтобы

$$P = 12x_1 + 8x_2 \quad (2)$$

имела максимальное значение.

Вспомним, что допустимая область представляет многоугольник OABCD. Каждая его вершина соответствует базисному допустимому решению (например, вершина A соответствует случаю, когда в (1) $x_2 = 0, s_2 = 0$), одно из которых оптимальное. Это дает нам ключ к тому, как следует поступать в общем случае [2].

Симплекс-метод по существу состоит в следующем.

(I) Найти какое-либо базисное допустимое решение и вычислить для него значение целевой функции. Это решение соответствует крайней точке допустимой области (в двухмерном случае — вершине допустимого многоугольника).

(II) Исследовать каждое граничное ребро допустимой области, проходящее через эту крайнюю точку, чтобы выяснить, не возрастает ли значение целевой функции при движении вдоль данного ребра.

(III) Если оно возрастает, перейти по этому ребру в новую крайнюю точку и вычислить там значение целевой функции.

(IV) Повторять пункты (II) и (III) до тех пор, пока движение по каждому ребру, проходящему через какую-то крайнюю точку, не перестанет приводить к росту целевой функции. Эта крайняя точка и есть оптимальное решение. Заметьте, что мы не указали, как ищется базисное допустимое решение, необходимое на первом шаге (I).

У нас имеются три уравнения связи и пять переменных, поэтому следует выбрать какие-либо три из них, а остальные положить равными нулю. Если эти три ненулевые переменные удовлетворяют уравнениям связи (1), то нужно искать первое базисное допустимое решение, где эти три переменные образуют базис. Как их выбрать? Заметим, что каждая из нежестких переменных входит только в одно уравнение. Это-то и облегчает выбор: мы можем взять в качестве базиса нежесткие переменные. Базисное допустимое решение задается в виде: $s_1 = 1400, s_2 = 1800, s_3 = 1800, x_1 = 0, x_2 = 0$. Следующий шаг состоит в том, чтобы с помощью уравнений связи выразить базисные переменные в целевую функцию через небазисные переменные. Это приводит к системе

$$\begin{cases} s_1 = 1400 - 4x_1 - 4x_2 \\ s_2 = 1800 - 6x_1 - 3x_2 \\ s_3 = 1800 - 2x_1 - 6x_2 \\ P = 12x_1 + 8x_2 \end{cases} \quad (3)$$

Ясно, что P можно увеличить, увеличивая либо x_1 , либо x_2 . В симплекс-методе каждый раз увеличивают только одну из переменных; в качестве таковой обычно выбирают ту, которая имеет наибольший коэффициент в целевой функции. В данном случае это x_1 . Но x_1 не может превосходить 300, в противном случае s_2 стало бы отрицательным. (Нужно помнить, что на данном этапе $x_2 = 0$.) Поэтому положим $x_1 = 300$ и как следствие $s_2 = 0$. x_1 стало базисной переменной, а s_2 — небазисной [3].

Снова выражаем базисные переменные и целевую функцию через небазисные и получаем:

$$\begin{cases} s_1 = 200 + \frac{2}{3}s_2 - 2x_2 \\ x_1 = 300 - \frac{1}{6}s_2 - \frac{1}{2}x_2 \\ s_3 = 1200 + \frac{1}{3}s_2 - 5x_2 \\ P = 3600 - 2s_2 + 2x_2 \end{cases} \quad (4)$$

Теперь переменные в правых частях уравнений нужно положить равными нулю, и тогда константы дадут текущие значения базисных переменных и целевой функции. С удовлетворением обнаруживаем, что прибыль возросла с 0 до 3600 фунтов стерлингов. Можно ли ее еще увеличить? Да. То, что в выражении для P при x_2 стоит положительный коэффициент, показывает, что, увеличивая x_2 , можно увеличить и P . Максимально допустимое значение x_2 равно 100, при этом s_1 обращается в нуль. Поэтому заменяем теперь s_1 на x_2 и выбираем в качестве базисных переменных x_1 , x_2 и s_3 . Поступая так же, как и ранее, получаем:

$$\begin{cases} x_2 = 100 - \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{3}s_2 \\ x_1 = 250 + \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 \\ s_3 = 700 + \frac{5}{2}s_1 - \frac{4}{3}s_2 \\ P = 3800 - s_1 - \frac{4}{3}s_2 \end{cases} \quad (5)$$

В P стоят отрицательные коэффициенты как при s_1 так и при s_2 , а потому возрастание любого из них может лишь уменьшить P . Мы получили окончательное решение. Полное изложение и формальное доказательство справедливости симплекс-метода можно найти в соответствующей литературе [4].

Симплекс-метод применим также и к нашей задаче о производстве обуви. Мы не будем давать ее решение, а просто сообщим результат: наилучший план заключается в выпуске 240 единиц продукции C_1 (x_5), 240 единиц продукции C_2 (x_6) и 480 единиц продукции D_1 (x_7), что приводит к общей прибыли 4560 фунтов стерлингов. Из восьми видов продукции выпускаются лишь три, и оказывается, что операция подборки совсем не нужна. Таким образом, здесь имеется излишек в 2400 машинных часов. Три другие операции также подвергаются ограничениям по объему производства, но каждая из них используется на полную мощность. У нас имеются четыре ограничения, а потому в любом базисном допустимом решении лишь четыре из восьми переменных будут иметь ненулевые значения. В оптимальном решении базис образуют x_5 , x_6 , x_7 и s_1 где s_1 — нежесткая переменная, которую необходимо ввести, чтобы условие-ограничение на операцию подборки превратить в уравнение.

До сих пор в этом примере мы имели дело с ограничениями на объем производства, но на практике могут существовать ограничения и на сбыт продукции. Предположим, к примеру, что максимальная продажа всех товаров категории С оценивается в 300 единиц. Это привело бы к новому ограничению (а именно, $x_5 + x_6 \leq 300$), и решение задачи пришлось бы пересмотреть. Теперь базис состоял бы из пяти ненулевых переменных и оптимальным оказалось бы решение $x_1 = 20$, $x_2 = 120$, $x_5 = 300$, $x_7 = 480$, $s_1 = 1580$, приводящее к максимальной прибыли 4420 фунтов стерлингов (Вот еще одно упражнение для любознательного читателя!) [5].

В реальной жизни дело, однако, не сводится к формальному решению одной или двух моделей линейного программирования. В управлении нужно знать ответ на один очевидный вопрос: насколько результаты оказываются чувствительными к малым изменениям (возможно, вследствие неточной информации) разных входящих в модель коэффициентов? Скажем, управляющий производством может интересоваться такими вещами, как дополнительная прибыль, которая получается при небольшом увеличении объема в каждом из критических режимов. Управляющему по сбыту может понадобиться информация о затратах на вынужденное производство той или иной продукции, которой не оказалось в представленном ему «оптимальном решении». В самом деле, ему может понадобиться обосновать, насколько нежелательно выпускать каждый из исключенных видов продукции. Было бы странно, если бы управление удовлетворилось первым же решением задачи. Хорошая компьютерная программа выдавала бы не только оптимальное решение, но и предельные прибыли и стоимости и прочие тонкости. Рассмотрение подобных вопросов вывело бы нас за рамки этой главы.

Нам не нужно забывать и о том, что компьютер при выполнении программы даже хуже последнего тупицы: он абсолютно не способен отступить от заложенных в него указаний. Это значит, что при составлении программы для ЭВМ необходимо учитывать все возможные непредвиденные обстоятельства, даже маловероятные.

Действительно, в моделях линейного программирования можно встретиться с разными типами вырожденного поведения: выполнение программы может приостановиться, несмотря на то, что мы не достигли оптимального решения, — может не сработать процедура по определению базисной переменной, которую следует удалить из базиса, или некоторые из базисных переменных могут обратиться в нуль. Это задача линейного программирования с одиннадцатью переменными и пятью уравнениями связи, которую можно представить в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 35 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 20 \\ z_1 + z_2 = 15 \\ w_1 + w_2 = 30 \\ x_1 + y_1 + z_1 + w_1 + s = 50 \end{cases} \quad (6)$$

причем все переменные неотрицательны и нужно минимизировать целевую функцию

$$C = 6x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 8y_1 + 10y_2 + 9y_3 + 10z_1 + 12z_2 + 12w_1 + 14w_2$$

Применяя симплекс-метод, находим базисное допустимое решение: $x_1 = 35$, $y_1 = 5$, $y_3 = 15$, $z_1 = 15$, $w_1 = 30$. Выражая, как обычно, C через шесть небазисных переменных, получаем

$$C = 930 + x_2 + y_2 + z_2 + w_2 + s \quad (7)$$

Поскольку все коэффициенты в (7) положительны, то мы нашли оптимальное решение: минимальное значение C равно 930. Но так как коэффициент при x_1 в (7) обратился в нуль, возникает вырождение. Это означает, что найденное решение не единственное. Не изменяя значения C , в базисе можно поменять местами x_1 и y_1 . Общее оптимальное решение представляется в виде:

$$\begin{cases} x_1 = t, x_3 = 35 - t, y_1 = 5 - t, y_3 = 15 + t \\ C = 930, 0 \leq t \leq 5 \end{cases} \quad (8)$$

Большинство типов вырождения можно проиллюстрировать геометрически путем простых изменений одного или нескольких из уравнений (1). Читателю предлагается самому проделать эти эксперименты.

Список литературы / References

1. Ашманов С.А. Линейное программирование / С.А. Ашманов. М., 2016.
2. Вычислительные методы и программирование / ред. В.И. Дмитриев, А.С. Ильинский, и др. М.: МГУ, 2015.
3. Палий И.А. Линейное программирование / И.А. Палий. М.: Эксмо, 2013.
4. Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. М., 2013.
5. Юдин Д.Б. Задачи и методы линейного программирования. Задачи транспортного типа / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. М.: Либроком, 2014.