THE DECISION OF SOME ALGEBRAIC TASKS USE BY A VECTOR

Rahimov N.[1], Rayimkulov P.[2], Haqnazarova Kh.[3] (Republic of Uzbekistan)

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРА

Рахимов Н. Н.[1], Райимкулов П. М.[2], Хакназарова Х. К.[3] (Республика Узбекистан)

[1]Рахимов Насриддин Номозович / Rahimov Nasriddin – преподаватель;
[2]Райимқулов Пардамурод Махмасаидович / Rayimkulov Pardamurod – преподаватель;
[3]Хакназарова Хуршида Кенжаевна / Haqnazarova Khurshida – преподаватель,
Академический лицей № 2
Самаркандский государственный университет, г. Самарканд, Республика Узбекистан

Abstract: *many mathematical tasks suppose some variants of the decision. Often first elected happens not most successful. The presence(finding) of the "most simple", original ways of the decision quite often grows out of long and laborious job. Skill to decide(solve) a task by various ways is one of attributes of good mathematical preparation. There are ways of the decision of algebraic tasks by methods based on evident - geometrical interpretations. The concept of a vector is one of fundamental concepts of a school rate of geometry. Use of a vector method is "From all is malicious" at the decision many planimetric and stereometric tasks. The vector finds wide application in physics. But on it use of a vector by the schoolboys, as a rule, also comes to an end. It seemed to me interesting to find an opportunity to use a vector at the decision of algebraic tasks. The method the decision with the help of a vector some algebraic tasks is specified in clause.*

Аннотация: *многие математические задачи допускают несколько вариантов решения. Часто первый избранный бывает далеко не самым удачным. Нахождение «наиболее простых», оригинальных путей решения нередко является результатом длительной и кропотливой работы. Умение решать задачу различными способами является одним из признаков хорошей математической подготовки. Существуют способы решения алгебраических задач методами, основанными на наглядно-геометрических интерпретациях. Понятие вектора является одним из фундаментальных понятий школьного курса геометрии. Использование векторного метода является «панацеей» при решении многих планиметрических и стереометрических задач. Вектор находит широкое применение в физике. Но на этом использование вектора школьниками, как правило, и заканчивается. Нам показалось интересным, найти возможность использовать вектор при решении алгебраических задач. В статье указан метод решения с помощью вектора некоторых алгебраических задач.*

Keywords: *a vector, numbers, module, equation, inequality, equality, system the equation and trigonometry.*

Ключевые слова: *вектор, координата, числа, модуль, уравнение, неравенство, сумма, положительный, отрицательный, корень, равенство, система, уравнение и тригонометрия.*

Мы в этой статье покажем как можно с помощью вектора решить не только геометрические, но и алгебраические задачи. Решать задачи этим методом полезно для подготовки учащихся к олимпиадам по математике. Теперь мы решим некоторые алгебраические задачи с помощью вектора.

1 задача. Числа x, y, z таковы, что x+y+z=1. Доказать неравенство $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}<5$, здесь $x,y,z\geq -\frac{1}{4}$. [2]

Решение. Рассмотрим два вектора $\vec{m}\left(\sqrt{4x+1};\sqrt{4y+1};\sqrt{4z+1}\right)$ и $\vec{n}(1;1;1)$. Очевидно, имеет место следующее неравенство $\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|\leq\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|$ или в координатной форме $\left|x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3\right|\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$. Именно это последнее неравенство является ключом к решению. Значит

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=\sqrt{4x+1}\cdot 1+\sqrt{4y+1}\cdot 1+\sqrt{4z+1}\cdot 1\leq\sqrt{4x+1+4y+1+4z+1}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}=$$
$$=\sqrt{4(x+y+z)+3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{7\cdot 3}=\sqrt{21}<5$$

2 задача. Решить уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

Решение. Оценим левую и правую части уравнения: $x^2-6x+11=(x-3)^2+2\ge 2$, $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{x-2}\cdot 1+\sqrt{4-x}\cdot 1\le\sqrt{x-2+4-x}\cdot\sqrt{1^2+1^2}=2$. Здесь векторы выбраны следующим образом: $\vec{m}(\sqrt{x-2};\sqrt{4-x})$ и $\vec{n}(1;1)$. Теперь ясно, что исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-6x+11=2 \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2 \end{cases}$. Решим этого системе найдём корень. Ответ: x=3. $[2,5]$

3 задача. Числа x, y, z таковы, что $x^2+3y^2+z^2=2$. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения 2x+y-z.

Решение. Ясно, что для оценки выражения 2x+y-z координаты векторов необходимо выбрать так, чтобы модуль одного из них был равен $\sqrt{x^2+3y^2+z^2}=\sqrt{2}$. Рассмотрим векторы $\vec{m}(x;y\sqrt{3};z)$ и $\vec{n}\left(2;\frac{1}{\sqrt{3}};-1\right)$. Тогда имеем $|2x+y-z|\le\sqrt{x^2+3y^2+z^2}\cdot\sqrt{4+\frac{1}{3}+1}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}}=4\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Следовательно, $-4\sqrt{\frac{2}{3}}\le 2x+y-z\le 4\sqrt{\frac{2}{3}}$. $[1,4]$

4 задача. Положительные числа a, b, c таковы, что abc=1. Докажите неравенство $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$.

Решение. Удобно перейти к новым переменным x=1/a, y=1/b, z=1/c, также положительным и связанным условием xyz=1. Данное неравенство эквивалентно следующему: $S=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{3}{2}$. Применяя неравенство Коши – Буняковского к векторам $\vec{m}\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}},\frac{y}{\sqrt{z+x}},\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ и $\vec{n}(\sqrt{y+z},\sqrt{z+x},\sqrt{x+y})$ получаем $(x+y+z)^2\le 2S(x+y+z)$, т.е. $S\ge(x+y+z)/2$. Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трёх положительных чисел, получаем:

$$S\ge\frac{3}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}.$$ $[2]$

5 задача. Среди всех решений системы $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z^2+t^2=9 \\ xt+yz=6 \end{cases}$

Выберите те, для которых величина x+z принимает наибольшее значение.

Решение. Рассмотрим векторы $\bar{a}$ =(x, y) и $\bar{b}$ =(t, z). По условию |a|=2, |b|=3, (a, b) = 6 = |a||b|.
Значит, векторы a и b направлены одинаково, то есть a =2(u, v), b =3(u, v).

Положим u =cosφ, v =sinφ, тогда $x+z=2\cos\varphi+3\sin\varphi=\sqrt{13}\sin(\varphi+\alpha)\le\sqrt{13}.$

6 задача. Докажите, что если a2+b2+c2=1, m2+n2=3, то $|ma+nb+c|\le 2$.

Решение. Введем векторы в пространстве $\bar{u}(a;b;c)$ и $\bar{v}(m;n;1)$. Применим векторное неравенство Коши – Буняковского $\left|\bar{u}\cdot\bar{v}\right| = \left|am+bn+c\right| \le \left|\bar{u}\right|\cdot\left|\bar{v}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+1} = 2$. [2]

7 задача. Решить уравнение: $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x} = 2\sqrt{1+x^2}$.

Решение. Воспользуемся неравенством $a_1a_2+b_1b_2 \le \sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}$.

Имеем $x\sqrt{1+x}+1\cdot\sqrt{3-x} \le \sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{(1+x)+(3-x)} = 2\sqrt{1+x^2}$.

Значит, векторы (x;1) и ($\sqrt{1+x},\sqrt{3-x}$) коллинеарны, т.е.

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}},\ x\sqrt{3-x} = \sqrt{x+1},\ x^3-3x^2+x+1=0,\ (x-1)(x^2-2x-1)=0.$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1+\sqrt{2},\ x_3 = 1-\sqrt{2}.$$

Последний корень посторонний. Ответ: 1, $1+\sqrt{2}$. [2]

8 задача. Найдите наибольшее значение функции: $y=\sqrt{x+28}+\sqrt{22-x}$.
Решение. Областью определения функции является отрезок [-28; 22].

Введем векторы $\bar{u}\left(\sqrt{x+28};\sqrt{22-x}\right)$ и $\bar{v}(1;1)$. Получаем:

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = \sqrt{x+28}+\sqrt{22-x} \le \left|\bar{u}\right|\cdot\left|\bar{v}\right| = \sqrt{x+28+22-x}\cdot\sqrt{1+1} = \sqrt{50\cdot 2} = 10.$$

Видимо, наибольшее значение функции y есть 10. Достигается оно тогда, когда неравенство превращается в равенство, т.е. когда координаты векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$ пропорциональны:

$$\sqrt{x+28} = \sqrt{22-x} \Rightarrow x+28 = 22-x \Rightarrow x=-3.$$

Существенно, что значение x=-3 входит в область определения функции. Ответ: 10 при x=-3. [2,3]

Задачи для самостоятельной работы.

№ 1. Докажите неравенство: $4\sqrt{a}+3\sqrt{16-a} \le 20$ при любых $a\in[0;16]$. Когда достигается равенство?

№ 2. Докажите, что если *a*-*b*+*c*=6, то $\sqrt{a+1}+\sqrt{2-b}+\sqrt{c+3} \le 6$.

№ 3. Докажите, что если $a^2+b^2 \le 32$, то $|a+b| \le 8$.

№ 4. Решить уравнение $2\sqrt{x-1}+5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$

№ 5. Найдите наибольшие значения функций:

a) $y=\sqrt{x-8}+\sqrt{16-x}$ b) $y=\sqrt{\sin^2 x+1}+\sqrt{\cos^2 x+1}$

Литература

1. *Галкин Е. В.* Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 7—11 кл. Челябинск: «Взгляд», 2004. 448 с.
2. *Яковлев Г. Н., Купцов Л. П. и др.* Всероссийские математические олимпиады школьников. Москва, Издательство «Просвещение » 1992 г.
3. *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике. Москва, Издательство «Просвещение», 1992 г.
4. *Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И.* Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. Справочное пособие. М.: МГУ, 1991.
5. *Супрун В. П.* Избранные задачи повышенной сложности по математике. Мн.: Полымя, 1998.