

Definition thermo-stressed state of the variable sections rod

Nogaibayeva M.¹, Kudaikulov A.² (Republic of Kazakhstan)

Определение термо-напряженного состояния стержня переменного сечения

Ногайбаева М. О.¹, Кудайкулов А. К.² (Республика Казахстан)

¹Ногайбаева Макпал Оразбаевна / Nogaibayeva Makpal Orazbayevna – PhD докторант;

²Кудайкулов Анарбай Кудайкулович / Kudaikulov Anarbay Kudaikulovich – доктор физико-математических наук, профессор,

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

Аннотация: в статье представлены результаты способов использования примерно-аналитического и численного решения задачи термо-напряжения ядра переменного сечения, застрявшего двумя концами в присутствии теплового потока и теплообмена. На основе приведенного примера приведен сравнительный анализ и определены ошибки использования указанных методов.

Abstract: in the paper ways of use of the approximately-analytical and numerical decision of a problem of a thermo-tension of the core of variable section jammed by two ends in the presence of a thermal stream and heat exchange are resulted. On the basis of the resulted example the comparative analysis is carried out and errors of use of the specified methods are defined.

Ключевые слова: температура, напряженное состояние, термоупругость, стержень.

Keywords: temperature, stressed state, thermoelasticity, the rod.

Рассмотрим вертикальный стержень переменного сечения и ограниченной длины L (см) с жестко защемленным верхним концом. Боковая поверхность стержня теплоизолирована. Ось Ox направлена сверху вниз и совпадает с осью исследуемого стержня. Вдоль этой оси радиус стержня r (см) меняется линейно по закону $r = ax + b$ (где a и b постоянные числа). Обозначим радиус стержня на верхнем конце (при $x = 0$) через r_0 , а на нижнем конце ($x = L$) через r_L , тогда изменение радиуса

$$r = \left(\frac{r_L - r_0}{L} \right) \cdot x + r_0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Относительно изменения радиуса значение площади поперечного сечения стержня зависит от координаты x нелинейно

$$F = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left[\left(\frac{r_L - r_0}{L} \right)^2 \cdot x^2 + 2r_0 \left(\frac{r_L - r_0}{L} \right) \cdot x + r_0^2 \right], \quad 0 \leq x \leq L \quad (1)$$

На площадь поперечного сечения верхнего защемленного конца ($x = 0$) стержня $S_0 = \pi \cdot r_0^2$ подведен тепловой поток q (Bm / cm^2). Через площадь поперечного сечения нижнего ($x = L$) конца стержня $S_L = \pi \cdot r_L^2$ происходит теплообмен с окружающей ее средой. При этом коэффициент теплообмена h ($Bm / (cm^2 \cdot C)$), а температура окружающей среды T_{co} (C) (Рисунок 1). Требуется определить поле распределения температуры по длине стержня переменного сечения, а также величину ее удлинения за счет температурного распределения.

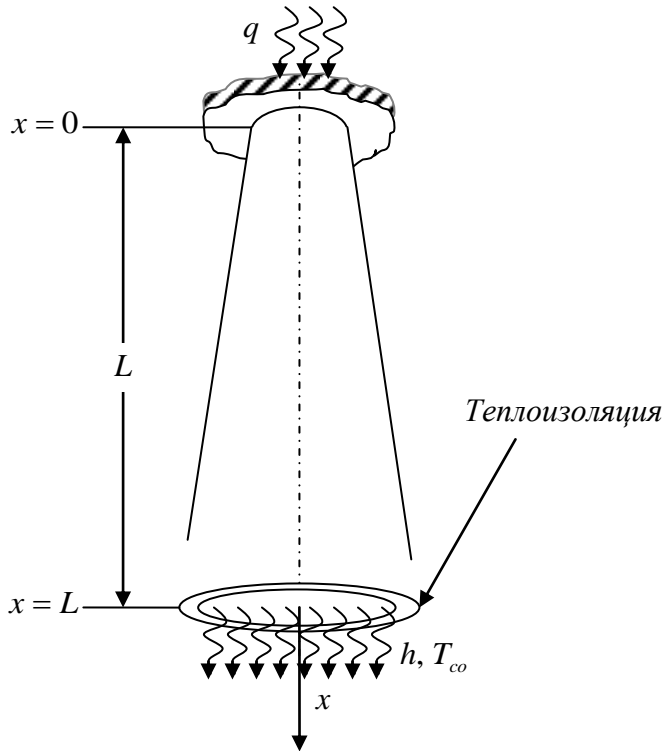


Рис. 1. Расчетная схема исследуемой задачи

Задача решается с помощью закона сохранения энергии. Сначала рассмотрим решение приближенно-аналитическим методом. Для этого поле распределения температуры по длине рассматриваемого стержня переменного сечения аппроксимируем полным полиномом второго порядка

$$T = T(x) = ax^2 + bx + c = \varphi_i(x)T_i + \varphi_j(x)T_j + \varphi_k(x)T_k, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2)$$

где

$$\varphi_i(x) = \frac{L^2 - 3Lx + 2x^2}{L^2}; \quad \varphi_j(x) = \frac{4Lx - 4x^2}{L^2}; \quad \varphi_k(x) = \frac{2x^2 - Lx}{L^2};$$

$$T_i = T(x=0); \quad T_j = T(x=L/2); \quad T_k = T(x=L). \quad (3)$$

Градиент температуры определяется из (2)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} T_i + \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} T_j + \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} T_k = \frac{4x - 3L}{L^2} T_i + \frac{4L - 8x}{L^2} T_j + \frac{4x - L}{L^2} T_k \quad (4)$$

Выражение функционала, характеризующее полную тепловую энергию исследуемого переменного сечения стержня ограниченной длины [2, 3]

$$I = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_0} q T dS + \int_{S_L} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 dS \quad (5)$$

где V - объем стержня переменного сечения; S_0 - площадь поперечного сечения верхнего заземленного конца стержня; S_L - площадь поперечного сечения нижнего конца стержня.

Объем стержня переменного сечения определим как объем усеченного конуса

$$V = \frac{1}{3} (r_0^2 + r_0 r_L + r_L^2) \cdot \pi L \quad (6)$$

Из соотношений (4) и (5) получим интегрированный вид функционала (5)

$$I = \frac{K_{xx}}{2} \int_0^L \left(\frac{4x - 3L}{L^2} T_i + \frac{4L - 8x}{L^2} T_j + \frac{4x - L}{L^2} T_k \right)^2 dx + \int_{S_0} q T dS + \int_{S_L} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 dS =$$

$$= \frac{SK_{xx}}{6L} (7T_i^2 - 16T_iT_j + 2T_iT_k - 16T_jT_k + 16T_j^2 + 7T_k^2) + qS_0T_i + \frac{hS_L}{2} (T_k - T_{co})^2$$

(7)

где $S = \frac{\pi}{3} (r_0^2 + r_0r_L + r_L^2)$; $S_0 = \pi \cdot r_0^2$; $S_L = \pi \cdot r_L^2$.

Далее, минимизируя функционал I по узловым значениям температуры, получим следующую систему разрешающих уравнений

$$\left. \begin{aligned} 1) \frac{\partial I}{\partial T_i} = 0; &\Rightarrow \frac{S \cdot K_{xx}}{6L} (14T_i - 16T_j + 2T_k) + q \cdot S_0 = 0 \\ 2) \frac{\partial I}{\partial T_j} = 0; &\Rightarrow \frac{S \cdot K_{xx}}{6L} (-16T_i - 16T_k + 32T_j) = 0 \\ 3) \frac{\partial I}{\partial T_k} = 0; &\Rightarrow \frac{S \cdot K_{xx}}{6L} (2T_i - 16T_j + 14T_k) + \frac{h \cdot S_L}{2} (2T_k - 2T_{co}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Решая систему (8), определяем узловые значения температуры

$$\left. \begin{aligned} T_i &= T_{co} - \frac{qS_0}{hS_L} - \frac{qLS_0}{SK_{xx}}; \\ T_j &= T_{co} - \frac{qS_0}{hS_L} - \frac{qLS_0}{2SK_{xx}}; \\ T_k &= T_{co} - \frac{qS_0}{hS_L}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (2), определим закон распределения температуры по длине исследуемого стержня переменного сечения.

$$T = T(x) = \left(T_{co} - \frac{qLS_0}{SK_{xx}} - \frac{qS_0}{hS_L} \right) + \frac{qS_0}{SK_{xx}} \cdot x, \quad 0 \leq x \leq L$$

Отсюда видно, что в этом случае закон распределения температуры по длине стержня переменного сечения имеет линейный характер. Тогда градиент температуры будет постоянной величиной, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{qS_0}{SK_{xx}}, \quad 0 \leq x \leq L$$

Для решения введем следующие исходные данные $L = 20$ (см); $r_0 = 1$ (см); $r_L = 2$ (см); $K_{xx} = 100$ (Bm/(см·°C)); $q = -1000$ (Bm/см²); $h = 10$ (Bm/(см²·°C)); $T_{co} = 40$ (°C); $E = 2 \cdot 10^6$ (κΓ/см²). Коэффициент теплового расширения материала стержня $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ (1/°C).

Тогда $T_i = 150,714$ (°C); $T_j = 107,857$ (°C); $T_k = 65$ (°C),

закон распределения температуры по длине исследуемого стержня переменного сечения

$$T(x) = 150,714 - \frac{30}{7} \cdot x, \quad 0 \leq x \leq L = 20 \text{ см};$$

площадь ограниченной координатными осями OT и Ox

$$S_{T_1} = \int_0^L T(x) dx = 2157,14 \text{ (}^\circ\text{C} \times \text{см)};$$

величина удлинения исследуемого стержня

$$\Delta \ell_{T_1} = \int_0^L \alpha \cdot T(x) dx = 2157,14 \cdot 125 \cdot 10^{-7} = 0,02696 \text{ см}.$$

Здесь следует отметить, что полученное аналитическое решение $T = T(x)$ является относительно приближенным. В целях исследования погрешности полученного аналитического решения теперь данную задачу решим численно. Для этого исследуемый стержень дискретизируем 2, 4, 8, 10, 100, 200, 300 квадратичными элементами, каждый раз полученные численные решения сравниваем с приближенно-аналитическим решением. Полученное приближенно-аналитическое решение будет завышено всего на 3,919 % от численного решения с погрешностью 0 %.

На рисунке 2 приводится разница приближенно-аналитического решения от численно-точного.

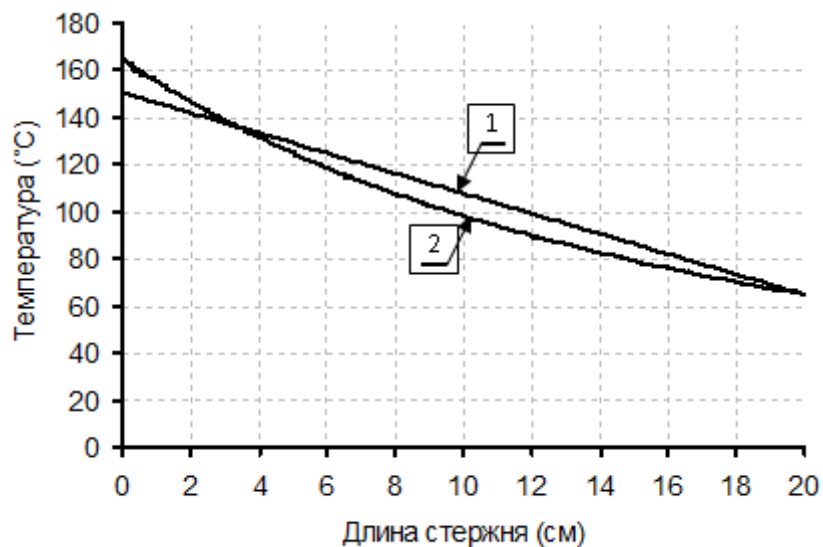


Рис. 2. Поле распределения температуры по длине стержня переменного сечения:
1 - приближенно-аналитическое решение; 2 - численное решение с погрешностью

Теперь в этом примере предположим, что оба конца рассматриваемого стержня переменного сечения жестко защемлены. В связи с этим в нем возникает сжимающее усилие и напряжение (Рисунок 3).

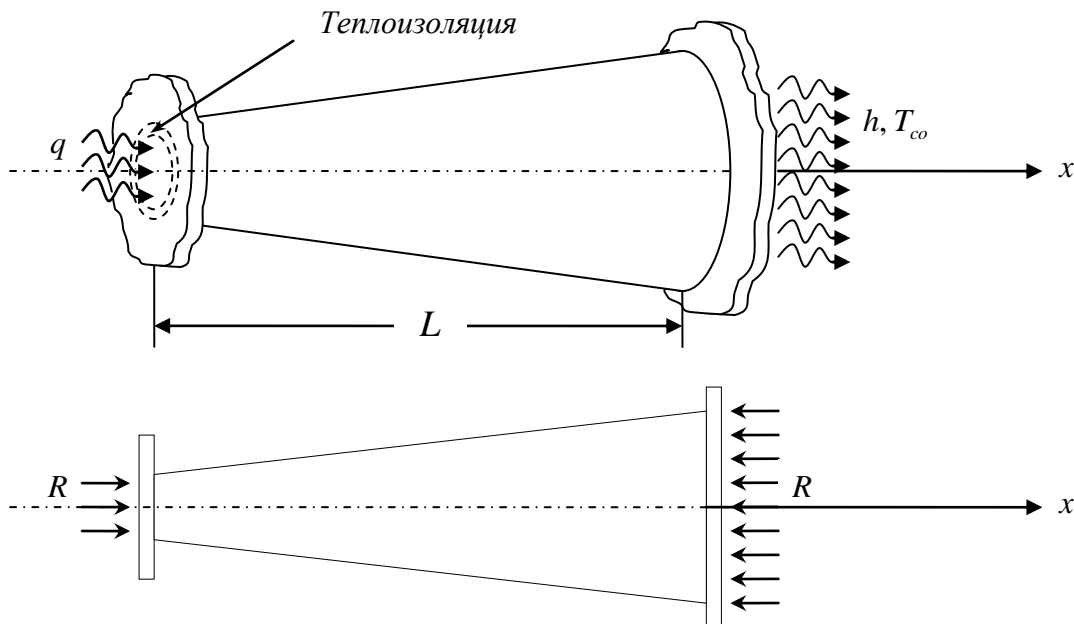


Рис. 3. Расчетная схема защемленного двумя концами стержня переменного сечения

Для определения величины сжимающего усилия R , необходимо вычислить осредненную величину площади поперечного сечения. Площадь поперечного сечения левого конца стержня будет

$F_0 = \pi \cdot r_0^2 = \pi$, а правого конца $F_L = \pi \cdot r_L^2 = 4\pi$. Тогда вычисляем арифметическое среднее значение площади поперечного сечения. Каждое значение площади поперечного сечения определяется по формуле (1).

Предположив, что один конец стержня свободен, и на него приложено сжимающее усилие R , по закону Гука, определим величину сжатия исследуемого стержня

$$\Delta \ell_R = \frac{RL}{EF_{cp}}. \quad (10)$$

где F_{cp} - арифметическое среднее значение площади поперечного сечения.

Учитывая условия совместности деформации для защемленного двумя концами стержня переменного сечения

$$\Delta \ell_R + \Delta \ell_T = 0. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (11), получим $\frac{RL}{EF_{cp}} + \Delta \ell_T = 0$, откуда имеем

$$R = -\frac{\Delta \ell_T \cdot E \cdot F_{cp}}{L}$$

В нашем примере при принятых исходных данных

$$R = -\frac{0,025907 \cdot (2 \cdot 10^6) \cdot 7,330376}{20} = -\frac{379816,118}{20} = -18990,8 \text{ (кГ)}. \quad (12)$$

Следует отметить, что если площадь поперечного сечения исследуемого стержня была бы постоянной и $F = \pi \cdot r^2 = \pi$, то величина сжимающего усилия была бы

$$R = -\frac{0,025907 \cdot (2 \cdot 10^6) \cdot \pi}{20} = -8134,9 \text{ (кГ)}.$$

Значения термоупругого напряжения в любом сечении рассматриваемого стержня переменного сечения определяется в соответствие закона Гука

$$\sigma(x) = \frac{R}{F(x)}$$

где $F(x)$ определяется формулой (1). В частности

$$\sigma(x=0) = \frac{R}{F(x=0)} = \frac{R}{\pi \cdot r_0^2} = -6044,959 \text{ (кГ/см}^2\text{)};$$

$$\sigma(x=L/2) = \sigma(x=10) = \frac{R}{F(x=10)} = \frac{R}{\pi \cdot r_x^2} = -2686,648 \text{ (кГ/см}^2\text{)};$$

$$\sigma(x=L) = \sigma(x=20) = \frac{R}{F(x=20)} = \frac{R}{\pi \cdot r_L^2} = -1511,239 \text{ (кГ/см}^2\text{)}.$$

Теперь, пользуясь соотношениями (17) и (1), можем построить поле распределения термоупругого напряжения по длине исследуемого стержня переменного сечения (Рисунок 4).

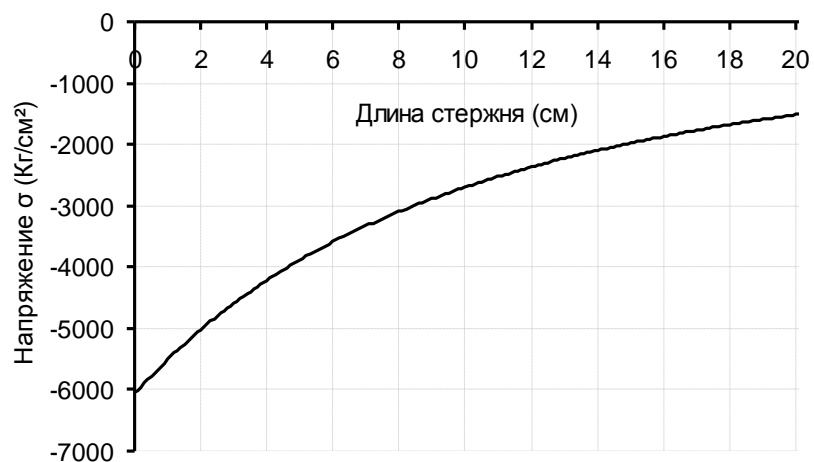


Рис. 4. Поле распределения напряжений по длине стержня переменного сечения

Таким образом, выяснили, что во многих инженерных расчетах можно пользоваться удобным приближенно-аналитическим решением (рис. 3).

А также определено, что значение напряжения на площадях по длине исследованного заземленного с обеих концов усеченного конуса будет разным (рис. 4).

Литература

1. *Huebner K. H.* The Finite Element Method for Engineers. Wiley, N.Y., 1975. 187 p.
2. *Ноздрев В. Ф.* Курс термодинамики. М.: Мир, 1967. 247 с.
3. *Кудайкулов А. К.* Математическое (конечно-элементное) моделирование прикладных задач распространения тепла в одномерных конструктивных элементах. Учебное пособие. Туркестан: им.Х. А. Ясави МКТУ, «Байтерек», 2009. 168 с.