Решение задач с использованием координатных плоскостей.
Solving problems using coordinate planes
Рахимов Н. Н.

Рахимов Насриддин Номозович / Raximov Nasriddin Nomozovich - заведующий кафедрой,
кафедра математика и информатики,
академический лицей № 2,
Самаркандский государственный университет, г. Самарканд, Узбекистан

Аннотация: *в статье показано решение некоторых задач с использованием координатных плоскостей Декарта.*
Abstract: *the article shows the solution of some problems using coordinate planes Descartes.*

Ключевые слова: *система координат, прямоугольник, вектор, функции, значения.*
Keywords: *system of coordinate, rectangular, vector, function, meaning.*

В этой статье мы хотим показать решение некоторых задач с помощью координат системы Декарта. Решение задач этим способом будет занимательно для учеников.

1-задача. Дано $|\overline{a}| = 3,\ |\overline{\mathrm{b}}| = 4$, угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{\mathrm{b}}$ равен 60^0. Если $(\overline{a} + \lambda\overline{b}) \perp \overline{b}$, то требуется найти λ.

Решение

Построим следующий график (рисунок 1).

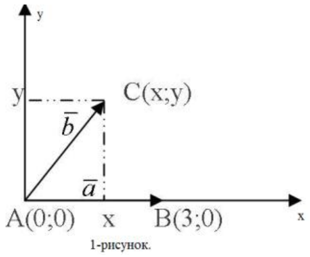

Рис. 1

Здесь вектор $\vec{a}$ расположим на оси OX, тогда будет $\vec{a}(3;0)$. Известно, что в условии задачи угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{\mathrm{b}}$ равен 60^0. Теперь найдем $x = 2,\ \mathrm{y} = 2\sqrt{3}$ координаты векторов $\overline{b}(x; y)$. Тогда будет $\vec{a}(3;0)$ и $\lambda \cdot \overline{b}(2;2\sqrt{3})$. Из условия перпендикулярности двух векторов:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 6 + 4\lambda + 12\lambda = 0$$

$$\lambda = -\frac{3}{8}$$

2-**задача.** Внутри прямоугольника расположена точка М. Расстояние из этой точки до трех вершин прямоугольника соответственно равно m, n, k, требуется найти расстояние до четвертой вершины.

Решение

По координатам плоскости построим прямоугольник со сторонами *a* и *b* (рисунок 2).

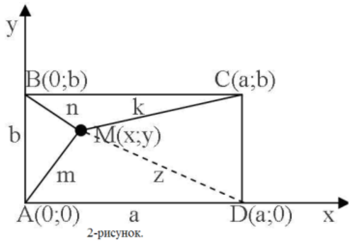

Рис. 2

Из условия задачи |AM|=m, |BM|=n, |CM|=k. Надо найдем z=|DM|=?

По формуле расстояние между двух точек будет $\begin{cases} x^2 + y^2 = m^2 \\ x^2 + (y - b)^2 = n^2 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = k^2 \end{cases}$

Вычтем от первого уравнение вторые, из него слагаем третье:
$(x-a)^2+y^2=m^2-n^2+k^2$.

Левая сторона этого уравнения равна z^2. Значит, ответ: $z = \sqrt{m^2 + k^2 - n^2}$.

3-**задача.** Найдите наименьшее значение функции

$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}$

Решение

Данная функция равна сумме расстояний от точки M(x;0) до точек A(3;2) и B(7;3) соответственно (рисунок 3).

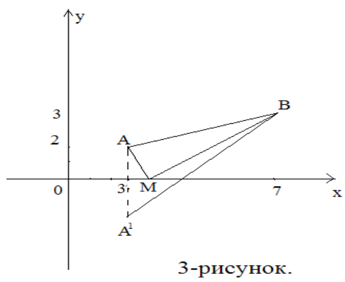

Рис. 3

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58} = \sqrt{(x-3)^2 + 2^2} + \sqrt{(x-7)^2 + 3^2} .$$

Наименьшее значение этой суммы равно расстоянию от точки $A'(3;-2)$ до точки B (7; 3). В самом деле, если $A'(3;-2)$ - точка, симметричная точке A относительно оси *Ox*, то $AM + MB = A'M + MB$, но последняя сумма минимальна, когда точки A' , *M* и *B* лежат на одной прямой. Значит, ответ

$|A'B| = \sqrt{(7-3)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{41}$ [1, с. 55-64].

4-задача. Дано три окружности w_1, w_2, w_3 соответственно с радиусом 1, 2, и 3. Они касаются друг с другом внешним образом. Эти окружности образуют треугольник. Найдите радиус вписанной окружности - w_4 этого треугольника.

Решение

Длина отрезков между центрами окружности w_1, w_2, w_3 , равны 3, 4, 5. Поэтому при построении треугольника эти отрезки составляет прямоугольные треугольники. Рисуем график координат плоскости по условию:

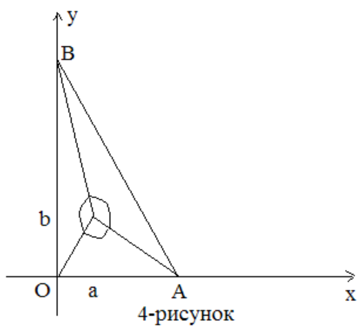

Рис. 4

Здесь, точки O, A и B - центры окружности w_1, w_2, w_3 . Искомый радиус r, а центр окружности w_4 равен D (a; b). Из рисунка будет OD=1+r, AD=2+r, BD=3+r. Значит, напишем следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} (1+r)^2 = a^2 + b^2 \\ (2+r)^2 = (3-a)^2 + b^2 \\ (3+r)^2 = a^2 + (4-b)^2 \end{cases}$$

От этой системы происходит уравнение $23r^2 + 132r - 36 = 0$. Решим это уравнение, найдем радиус окружности w_4, $r = \frac{6}{23}$ [3, с. 62-64].

5-задача. По дороге едут четверо: один на автомобиле, второй на мотоцикле, третий на мопеде, четвертый на велосипеде. Каждый едет со своей постоянной скоростью. Едущий на автомобиле догнал мопед в 12 ч, встретился с велосипедистом в 14 ч, а с мотоциклистом в 16 ч. Мотоциклист встретил мопед в 17 ч. и догнал велосипедиста в 18 ч. В котором часу велосипедист встретил мопед?

Решение

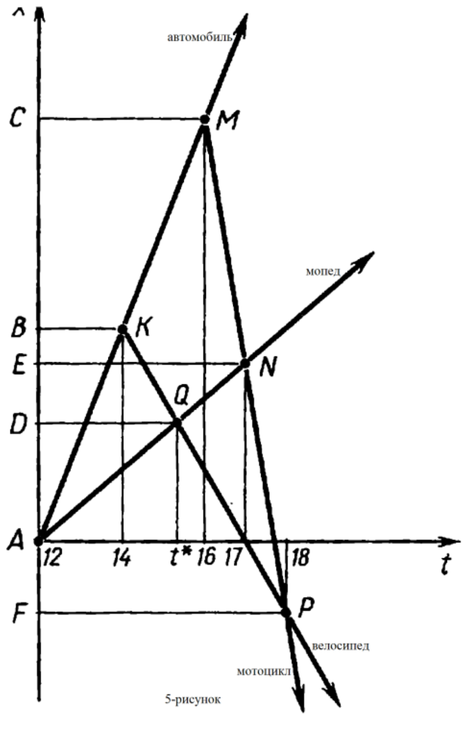

Рис. 5

Изобразим все перемещения в координатах *t* - время и *x* - расстояние (рисунок 5). Мы видим, что AK=KM, MN=NP, т. е. AN и PK являются медианами ΔAMP. Поэтому $AQ = \frac{2}{3}AN$, и в проекции на ось *t* получаем

$$t^* - 12 = \frac{2}{3}(17-12)$$. отсюда $$t^* = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$$.

Ответ: Велосипедист встретил мопед в 15^{20} часов [2, с. 21].

Литература

1. *Генкин Г. З*. Геометрические решения негеометрических задач. Москва «Просвещение» 2007. 75 с.

2. *Яковлев Г. Н., Купцов Л. П. и др.* Всероссийские математические олимпиады школьников. Москва, Издательство «Просвещение», 1992 г., 383 с.
3. Научный журнал «Физика, математика и информатика», 5/2010. Ташкент. [с. 62-64].