Методические особенности преподавания темы «Интеграл».
Methodical features of teaching the topic «Integral»
Марчук Н. А.[1], Гульманов Н. К.[2], Асетов А. А.[3]

[1]*Марчук Наталья Анатольевна / Marchuk Natalya Anatol'evna – учитель математики;*
[2]*Гульманов Нуртай Кудайбергенович / Gulmanov Nurtay Kudajbergenovich – магистр естественных наук, учитель математики;*
[3]*Асетов Алибек Асенович / Assetov Alibek Asenovich – магистр педагогических наук, учитель математики, химико-биологическое направление,*
Назарбаев Интеллектуальная школа, г. Караганда, Республика Казахстан

Аннотация: *данная статья посвящена вопросам теоретического и дидактического содержания, методики преподавания темы «Интеграл и его приложения». Для повышения эффективности и прикладной направленности обучения учтен ряд важных факторов, в частности, предлагается ряд практических задач по данной теме.*
Abstract: *this article is devoted to questions of theoretical and didactic content, methods of teaching the topic «integral and its applications». To improve the efficiency and applied orientation of training a number of important factors taken into account, in particular, it offers a number of practical problems on this topic.*

Ключевые слова: *методика, дидактика, теоретические вопросы, исследование, интеграл, прикладные задачи, повышение эффективности обучения, важные факторы.*
Keywords: *methodology, didactics, theoretical issues, research, integral, application tasks, improving the efficiency of training, are important factors.*

Современный этап развития Казахстанского и мирового сообщества характеризуется прогрессом науки, высокой актуальностью новых технических идей, разносторонним приложением математических методов в большинстве видов практической деятельности человека. Математика представляет общие и достаточно точные методы и модели для изучения окружающих нас природных, социально-экономических и других явлений. В связи с быстрым развитием возможностей компьютерной обработки данных возрастает роль математического моделирования. Все более широкий спектр математических знаний становится в наше время элементом общей культуры человека.

В Назарбаев Интеллектуальных школах преподавание математики ведется согласно интегрированной образовательной программы. Данная учебная программа разработана консультантами и преподавателями «Назарбаев Интеллектуальные школы» совместно с Международным Экзаменационным Советом Кембриджа. Учебная программа по математике в старшей школе призвана решить задачи сближения содержания школьного курса математики с достижениями современной науки, «способствовать повышению уровня математической культуры и развитию интеллектуальной восприимчивости и способности к усвоению новой информации, гибкости и независимости логического мышления, самостоятельности и коммуникативности, необходимых для успешного обучения в высшей школе» [1].

Одной из самых сложных тем курса математики старшей школы является «Интеграл и его приложения». Вопросы теоретического и дидактического содержания, методики преподавания темы «Интеграл и его приложения» являлись объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых, начиная с момента введения этого материала как части математического анализа в программу средней школы. Общепризнано то, что изучение даже первичных понятий и методов математического анализа имеет огромное значение для развития учащихся. Однако педагогическая практика показывает, что проблемы, возникающие при преподавании данной темы, не уменьшаются. Знания большинства школьников по данной теме носят лишь формальный характер, отсутствует структура знаний, не формируется полное представление о понятии интеграл, не выработаны прочные навыки решения задач.

Причинами проблем и трудностей являются очень высокая степень абстракции понятий, сложная логическая структура их определений, недостаточное время для осмысления и усвоения сложных вопросов и ряд других факторов. Поэтому успешное изучение раздела «Интеграл» зависит от необходимости решения проблем, связанных с правильной постановкой целей изучения курса, тщательным отбором содержания теоретического и дидактического материалов и методическими приемами и особенностями. Многих учителей математики волнует вопрос: как решить или минимизировать данные проблемы?

Особенностью интегрированной образовательной программы по математике в Назарбаев Интеллектуальных школах является ее цикличность. Понятие интеграл вводится сразу после первичного ознакомления с понятием производной от элементарных функций и правил дифференцирования в первой четверти 11 класса (11 класс в системе НИШ соответствует 10 классу средней общеобразовательной школы). Затем изучение разделов дифференциальное и интегральное исчисление продолжается в третьей четверти. Данная структура программы позволяет учащимся лучше усвоить материал, не потерять интерес и мотивацию к изучаемым темам, проводить сравнительный анализ между взаимообратными операциями дифференцирования и интегрирования.

При организации изучения темы «Интеграл» необходимо учесть ряд факторов, влияющих на успешность обучения.

1. Необходимо тщательно подбирать теоретический материал, сочетая принципы научности, преемственности и доступности его изложения. Реализовать в полном объеме принцип научности при изучении интеграла в школьном курсе математики не удается, ввиду отсутствия необходимого для вывода и доказательств формул, правил и теорем математического аппарата у учащихся. Но в процессе обучения у ребят должны сформироваться правильное понимание процесса интегрирования и его закономерностей.

2. Важно выбрать оптимальный способ представления учащимся теоретического материала. При изложении теории необходимо учесть общий уровень математической подготовленности класса и каждого учащегося в отдельности, психологические и возрастные особенности детей, их мышления. Преподавание должно быть максимально интересным, доступным, вестись систематично и последовательно.

3. Систему упражнений и задач нужно конструировать так, чтобы создать наилучшие условия для усвоения базовых понятий, формул и свойств, развивать у детей критическое мышление и способность анализировать. Этому в значительной степени способствуют практические задачи, задачи на исследование и доказательство.

4. Сделайте обучение более доступным и наглядным. Для лучшего понимания и запоминания материала, для визуализации изучаемых понятий процессов необходимо использовать на уроках различные виды наглядности (модели, чертежи, схемы, графики, таблицы, построения с помощью программы Geogebra и др.).

Повышению эффективности и прикладной направленности обучения во многом способствует решение практических задач. Учащимся важно показать актуальность применения математических методов в других науках, в частности, при изучении других предметов - химии, физики и биологии. Наиболее интересным и доступным для школьников является использование физических моделей при введении понятия интеграл. При рассмотрении понятия интеграла следует учесть, что его определение вводится в абстрактной форме. Поэтому основная проблема, стоящая перед учителем, заключается в конкретизации, то есть в представлении за математическими терминами и их определениями конкретных образов. На данном этапе изучения материала огромную помощь учащимся могут оказать тщательно подобранные задачи и примеры. Наряду с классическими задачами из учебников алгебры о перемещении материальной точки и о вычислении массы стержня, при введении понятия интеграла можно эффективно использовать и другие. Интеграл, как предел интегральных сумм, можно доступно и наглядно для обучающихся вводить на примере задач о давлении жидкости на стенку сосуда.

Задача. Бассейн наполнен водой. Найдите давление воды на прямоугольную стену бассейна с основанием прямоугольника, равным a и высотой H.

Решение: Высоту бассейна H разделим на n равных частей (каждую обозначим Δh). Стена разобьется на «элементы». Известно, что один кубический метр воды весит одну тонну, тогда давление столба жидкости высоты h_i м и площадью сечения 1 м^2 равно h_i тоннам. Если элемент расположен на глубине h_i, то давление воды на него вычисляется как произведение h_i на площадь элемента: $h_i \cdot a \cdot \Delta h$. Обозначим через $F(h_i)$ данное произведение $h_i \cdot a \cdot \Delta h$. Тогда величину давления воды на всю стену бассейна можно считать приближенно равной

$$P_n \approx F_1(h_1)\Delta h_1 + \ldots + F_n(h_n)\Delta h_n.$$

Данную сумму называют интегральной суммой функции $F(h)$ на отрезке $[0;H]$. Необходимо обратить внимание учащихся, что функция $F(h)$ должна быть непрерывна на отрезке $[0;H]$ и может принимать на нем любые значения. Если высоты «элементов» разбиения стремятся к нулю, $n \to \infty$, то точное выражение суммы равно $\lim\limits_{\Delta h \to 0} P_n$. Данный предел называют определенным интегралом от функции $F(h)$ на отрезке $[0;H]$ и обозначают $\int_0^H F(h)dh$ [2].

Затем понятие определенного интеграла необходимо обобщить совместно с учащимися на произвольную непрерывную функцию $F(x)$ и отрезок $[a;b]$.

Целесообразно использовать на уроке несколько физических задач, где интеграл определяется как приращение первообразной. В качестве одного из примеров можно рассмотреть задачу о перемещении материальной точки.

Задача. Обозначим через $v = v(t)$ скорость прямолинейного движения материальной точки, заданную на некотором промежутке времени $[t_1; t_2]$. Пусть $v(t) > 0$. Найти выражение для длины пути, пройденного точкой за указанный промежуток времени.

Решение: Пусть $S(t)$ - это координата точки в момент времени t. Тогда, так как перемещение при $v > 0$ происходит только в положительном направлении (или $S(t)$ – функция возрастающая, так как $S'(t) = v(t) > 0$), то искомое расстояние будет равно $S(t_2) - S(t_1)$. Иначе $S(t)$ - есть первообразная функции $v(t)$ (так как $S'(t) = v(t)$). Тогда, нахождение длины пути, пройденного материальной точкой за указанный промежуток времени, сводится к отысканию первообразной $S(t)$ функции $v(t)$, т. е. к нахождению интеграла функции $v(t)$. Разность $S(t_2) - S(t_1)$ называют интегралом от функции $v(t)$ на отрезке $[t_1; t_2]$ и обозначают: $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = S(t_2) - S(t_1)$ [3].

После введения понятия определенного интеграла важно вывести и доказать вместе с учащимися его основные свойства, необходимые в дальнейшем для решения задач. Изучение и доказательство свойств определенного интеграла тоже можно построить с помощью физических моделей.

1^0. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Для доказательства этого свойства решим задачу о перемещении материальной точки.

При введении понятия интеграла традиционно рассматривается случай, когда верхний предел интегрирования больше нижнего. Но определенный интеграл можно рассматривать и в случае, когда верхний предел меньше нижнего. Будем использовать определение интеграла как суммы. Разбивая отрезок $[a; b]$ промежуточными значениями $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, видим, что все Δt принимают отрицательные значения. Тогда:

$$\int_a^b v(t)dt = -\int_b^a v(t)dt. \tag{1}$$

2. $\int_a^b (F_1(x) + F_2(x))dx = \int_a^b F_1(x)dx + \int_a^b F_2(x)dx$.

Докажем это свойство на примере задачи о работе переменной силы.

К материальной точке, движущейся по оси OX, приложены силы $F_1(x)$ и $F_2(x)$, направленные по некоторой прямой в одну сторону. Под действием этих сил материальная точка совершила перемещение из точки a в точку b. При этом работа каждой силы на данном отрезке вычисляется по формулам: $A_1 = \int_a^b F_1(x)dx$ и $A_2 = \int_a^b F_2(x)dx$. Тогда общая работа, совершенная этими силами, равна

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^b F_1(x)dx + \int_a^b F_2(x)dx. \tag{*}$$

Равнодействующая данных сил вычисляется по формуле: $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$. Тогда работа этой силы равна

$$A = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b (F_1(x) + F_2(x))dx. \tag{**}$$

Из равенства левых частей формул (*) и (**) получим равенство правых, т. е.

$$\int_a^b (F_1(x)+F_2(x))dx = \int_a^b F_1(x)dx + \int_a^b F_2(x)dx.$$

Аналогичным образом с помощью физических моделей доказываются и другие основные свойства определенного интеграла. Выбор задач и способов доказательства предоставляется на усмотрение учителя. Каждую теоретическую выкладку необходимо при дальнейшем изучении темы закреплять, выполняя тренировочные упражнения и решая практические задачи. Данную методику введения понятия и изучения свойств определенного интеграла возможно реализовать при условии, что учащиеся знают все используемые при доказательствах физические формулы и определения. Используемые при доказательстве физические модели конкретны, следовательно, облегчают восприятие нового материала учащимися, способствуют лучшему пониманию и запоминанию определения и свойств интеграла. Решение практических и прикладных задач повышает мотивацию учащихся к изучению математики. Все это позволяет добиться улучшения качества знаний и создает благоприятные условия для дальнейшего математического образования учащихся, развития их критического мышления и творческих способностей.

Литература

1. Интегрированная образовательная программа по математике Назарбаев Интеллектуальных школ 2014 г.
2. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике Учебное пособие для физико-математических средних школ и проведения факультативных занятий. Зельдович, Я. Б., М.: Наука, 1990 г.
3. *Столяр А. А*. «Логические проблемы преподавания математики», Мнемозина, «Высшая школа», 2000 г.
4. Задачник по курсу матанализа Учебное пособие для студентов заочн. отделений физ.-мат. фак-тов пединститутов. Ч. I // Под редакцией Н. Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1991 г.
5. *Ахметов* М. Производные и интегралы в школьном курсе математики: автореф. дис. канд. пед. Наук, М., Ахметов. Алма-Ата, 1986 г.