

Step by step to success – or how to teach juniors to solve a non-standard math problems Bezukladnikova N.¹, Sheremet G.²

Шаг за шагом к успеху – или как научить решать нестандартные задачи младших школьников

Безукладникова Н. И.¹, Шеремет Г. Г.²

¹Безукладникова Нина Ивановна / Bezukladnikova Nina Ivanovna – заместитель директора,
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Гимназия № 17;

²Шеремет Галина Геннадьевна / Sheremet Galina Gennadievna – кандидат педагогических наук, доцент,
кафедра фундаментальной математики,
Пермский государственный научно-исследовательский университет, г. Пермь

Аннотация: в статье рассматривается вопрос обеспечения каждого ученика развивающей интеллектуальной деятельностью на доступном уровне. Предлагается систематизированный подход к решению нестандартных математических задач, основанный на концепции Д. Пойа. Предлагаемый подход рассматривается на примере решения математической задачи.

Abstract: the article takes a view on the problem of providing developing intellectual activities to every pupil, on their available level. Systematic approach to such problem solution, based on the well-known concept by D. Poya, is proposed. Proposed approach is explained within the process of solution of a particular math task.

Ключевые слова: математические задачи, системный подход, нестандартные задачи, развивающее обучение, школьное образование.

Keywords: mathematical tasks, systematic approach, non-standard problems, developing education, school education.

В последние несколько лет все чаще поднимается вопрос о роли математики в школьном образовании, а также об эффективности самого школьного образования. Основным документом, принятым по итогам многочисленных активных дискуссий и отражающим текущее состояние данного вопроса, является принятая в конце 2013 года концепция развития математического образования в Российской Федерации. Согласно этой концепции, математическое образование призвано «обеспечивать каждого обучающегося развивающей интеллектуальной деятельностью на доступном уровне, используя присущую математике красоту и увлекательность». Необходимо отметить, что привить ученику любовь к математике, раскрыть ее «красоту и увлекательность» можно только в том случае, когда на протяжении всего периода обучения ученик остается заинтересованным и вовлеченным в максимально широкий спектр математической активности. При этом одним из наиболее важных, критических периодов обучения, формирующих такую вовлеченность, является начальная школа.

Согласно такому подходу, в начальной школе обучающемуся предлагается широкий спектр математической активности как во время уроков, так и в период внеурочной деятельности. Примерами такой активности, в первую очередь, могут служить: решение логических и арифметических задач, построение алгоритмов в визуальной и игровой среде [3] и т. д.

При этом если в ходе обучения учитель будет дополнительно пробуждать любознательность учащихся, предлагая им задачи, соразмерные с их возрастными способностями и знаниями, своими наводящими вопросами будет помогать им решать эти задачи, то он сможет привить им вкус к самостоятельному мышлению и развить необходимые для этого способности.

Отметим, что максимальных результатов в этом процессе можно достичь лишь с использованием продуманного, системного подхода. Одним из вариантов такого подхода, рассматриваемым в настоящей статье, является использование концепции, предлагаемой Д. Пойа [2], и основанной на тщательно разработанной системе вопросов, позволяющей разбить решение задачи на отдельные, явные и интуитивно понятные обучающемуся этапы. Общая методология предлагаемого подхода состоит из разбития процесса решения задачи на 4 основных шага и приведена на схематическом рисунке (рис. 1). Проиллюстрируем основные ее шаги на примере обсуждения одной из возможных задач [1, с. 13]:

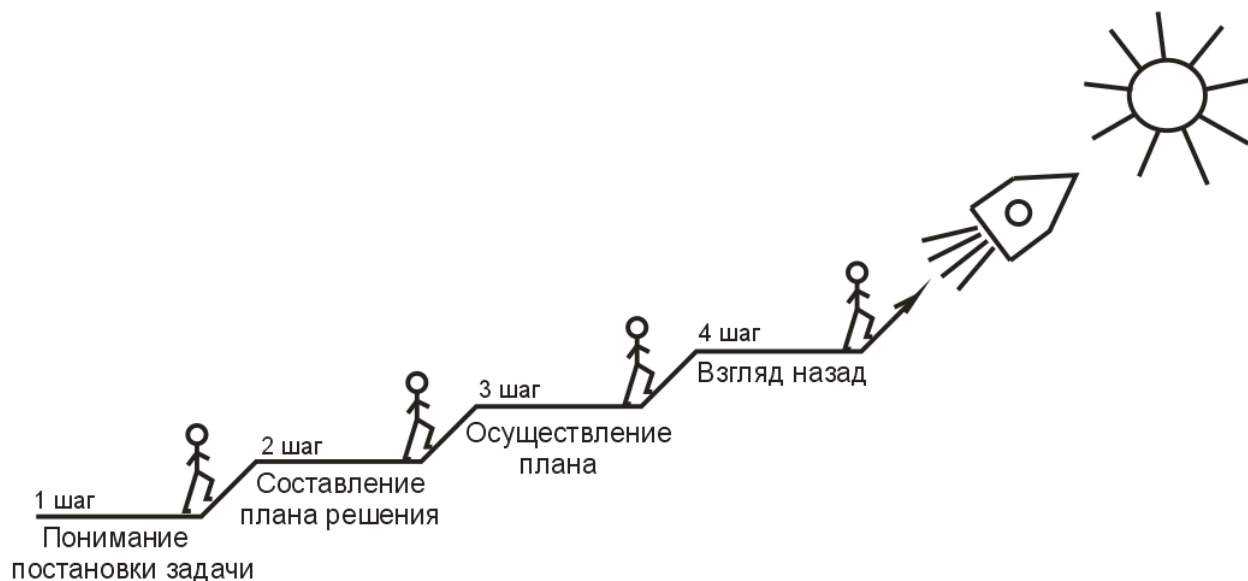


Рис. 1. Основные шаги предлагаемого подхода по Д. Пойа

Условие задачи: Расставьте в кружочки числа от 1 до 6 так, чтобы сумма чисел вдоль каждой стороны треугольника равнялась 12 (рис. 2).

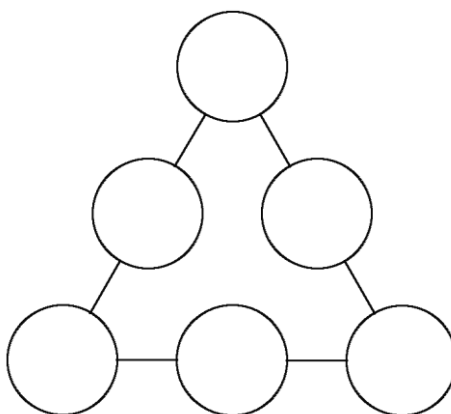


Рис. 2. Исходное условие задачи

1 шаг. Понимание постановки задачи

Основной целью первого шага является обеспечение понимания общей постановки задачи. В таблице 1 приведен перечень вопросов по Д. Пойа, ответ на которые приводит к достижению поставленной цели (пониманию условий задачи). Каждый ученик должен уметь четко ответить на них, так как эти вопросы относятся к главным элементам задачи – неизвестному, данным, условию.

Таблица 1. Вопросы для этапа понимания постановки задачи

Что дано?	• Шесть чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 и шесть позиций (кружочков), куда их надо расставить. • Кружочки расположены по сторонам треугольника. • На каждой стороне треугольника расположены три кружочка. • Любые две стороны имеют общий кружок. • Три кружка лежат в вершинах и принадлежат двум сторонам, а другие три – только одной стороне.
-----------	--

Что неизвестно?	Расположение данных чисел в кружочках.
В чем состоит условие задачи?	Числа должны располагаться в кружочках так, чтобы их сумма вдоль каждой стороны треугольника равнялась 12.
Возможно ли удовлетворить условию? Достаточно ли условие для определения неизвестного? Или недостаточно? Или чрезмерно? Или противоречиво?	- Что будет, если условие задачи изменить на следующее: <i>Расставьте в кружочки числа от 1 до 6 так, чтобы сумма чисел вдоль каждой стороны треугольника была одна и та же.</i> - В этом случае мы получили более сложную исследовательскую задачу, ответ на которую следующий: если сумма чисел вдоль каждой стороны треугольника одна и та же, то она может принимать любое значение от 9 до 12. Но это совсем другая история...

2 шаг. Составление плана решения

В ходе этого шага от ученика требуется найти связь между данными и неизвестным. Если это сразу не получается, возможно рассмотреть серию вопросов, предварительно сформулированных для аналогичной задачи. В таблице 2 представлены возможные типовые вопросы и их обсуждение.

Таблица 2. Вопросы для этапа составления плана решения

Известна ли вам какая-нибудь похожая задача? Нельзя ли воспользоваться ее результатом или методом решения?	- Постарайтесь вспомнить, не встречалась ли вам - эта задача, возможно, в несколько в иной форме; - задача с таким же или похожим неизвестным
Нельзя ли иначе сформулировать задачу? Еще иначе?	Представить число 12 в виде суммы трех различных слагаемых (натуральных чисел), каждое из которых не больше 6
Нельзя ли придумать более доступную сходную задачу? Или более общую? Или более частную?	Представить число 12 в виде суммы двух слагаемых, одно из которых не больше 6?

Таким образом, на основании анализа полученных ответов можно выделить основную идею будущего решения: «Для получения ответа - решаем последнюю из сформулированных задач, затем переходим к решению предыдущей задачи и пытаемся применить полученное решение к решению исходной задачи»

3 шаг. Осуществление плана

Третий шаг посвящен непосредственному решению задачи. Описывая его в своей работе, Д. Пойа акцентирует свое внимание на следующем: «Осуществляя план решения, контролируйте каждый свой шаг. Ясно ли вам, что предпринятый шаг правилен? Сумеете ли доказать, что он правилен?» [2, с. 203].

Проиллюстрируем данный шаг, продолжая рассмотрение нашего примера:

Так, решить последнюю из перечисленных в ходе анализа, выполненного на предыдущем этапе, задач достаточно легко. Представим число 12 в виде суммы двух слагаемых, одно из которых не больше 6:

$$12 = 1 + 11; 12 = 2 + 10; 12 = 3 + 9; 12 = 4 + 8; 12 = 5 + 7; 12 = 6 + 6.$$

Поможет ли решение этой задачи справиться с предыдущей? Да, действительно, для ее решения остается второе слагаемое представить в виде суммы двух различных слагаемых, не превосходящих 6.

$$12 = 1 + 5 + 6;$$

$$12 = 2 + 4 + 6;$$

$$12 = 3 + 4 + 5;$$

$$12 = 4 + 2 + 6 \text{ (повторяет второе разложение);}$$

$$12 = 4 + 3 + 5 \text{ (повторяет третье разложение);}$$

$$12 = 5 + 1 + 6 \text{ (повторяет первое разложение);}$$

$$12 = 5 + 2 + 5 \text{ (есть одинаковые слагаемые);}$$

$$12 = 5 + 3 + 4 \text{ (повторяет третье разложение);}$$

$$12 = 6 + 1 + 5 \text{ (повторяет первое разложение);}$$

$$12 = 6 + 2 + 4 \text{ (повторяет второе разложение).}$$

А теперь ответим на самый главный вопрос: как полученные представления числа 12 в виде суммы трех различных слагаемых, не превосходящих 6, помогут справиться с исходной задачей? Вновь вернемся к исходным данным задачи. Три кружка (см. рис. 2) лежат в вершинах и принадлежат двум

сторонам, а другие три – только одной стороне. Обратим внимание на полученные разложения: три числа (4, 5, 6) встречаются в двух суммах, а другие три числа (1, 2, 3) только в одной. Соответственно в искомых вершинах треугольника будут стоять числа 4, 5, 6. Все, решение найдено! (рис. 3)

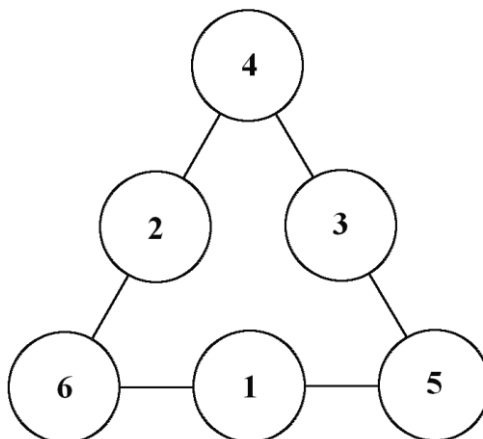


Рис. 3. Решение поставленной задачи

4 шаг. Взгляд назад

Четвертый шаг посвящен ретроспективному взгляду на полученное решение, а также на все предыдущие шаги, приведшие к нему. Использование такого ретроспективного взгляда позволяет учащемуся осуществить закрепление полученного материала, а также развить критическое мышление и, возможно, найти альтернативные, более красивые решения поставленной задачи. Необходимо заметить, что данный шаг очень часто опускается при решении учителем задач совместно с учениками, что приводит к значительному снижению дидактического эффекта. В таблице 3 приведены типовые вопросы, которые помогают в процессе обсуждения результатов полученного решения на данном шаге.

Таблица 3. Типовые вопросы для этапа обсуждения результатов

Нельзя ли проверить результат?	Проверим, все ли условия выполнены. В кружочках на сторонах треугольника расставлены все числа от 1 до 6 и сумма чисел на каждой стороне равна 12
Нельзя ли получить тот же результат иначе?	Найдем сумму всех чисел от 1 до 6. Как лучше всего ее вычислить? 1 вариант: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4) = 7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7 = 21$. 2 вариант: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (4 + 6) + (2 + 3 + 5) + 1 = 10 + 10 + 1 = 21$. Сумма чисел, стоящих на одной стороне треугольника, равна 12. $12 \cdot 3 = 36$. Но 36 превосходит сумму чисел от 1 до 6 на сумму чисел, стоящих в вершинах треугольника. $36 - 21 = 15$. Значит, сумма чисел, стоящих в вершинах треугольника, равна 15, и это различные числа, не превосходящие 6. Единственное представление числа 15 в виде такой суммы $15 = 4 + 5 + 6$ (Обоснуйте, почему). И мы опять приходим к найденному решению
Нельзя ли в какой-нибудь другой задаче использовать полученный результат или метод решения?	Полученный <i>результат</i> можно использовать при решении, например, следующей задачи: Коля, Толя, Ваня, Аня, Света и Даша собирали грибы. Известно, что все собрали различное количество грибов. При этом никто не собрал больше 6 грибов. Общее число грибов, собранных вместе Колей, Толей и Аней такое же, как и у Коли, Светы и Вани, и такое же, как у Толи, Вани и Даши. И это число равно 12. Сколько грибов собрали девочки вместе? А сколько грибов собрали вместе мальчики? Аналогичный <i>метод</i> можно применить при решении следующих задач:

1. Расставьте в кружочки числа от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел вдоль каждой стороны треугольника равнялась 23 (рис. 3).

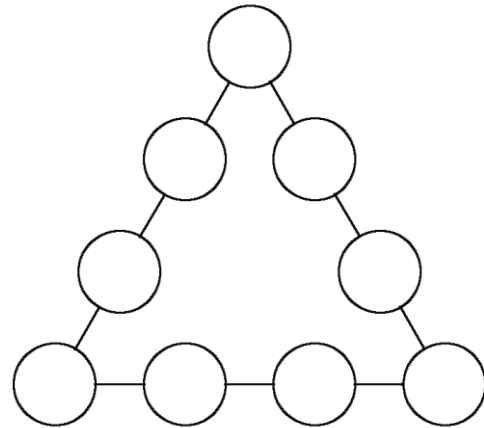


Рис. 4

2. Расставьте числа от 1 до 8 в вершинах куба так, чтобы сумма чисел на каждой грани куба была одинаковой (или *менее сложный вариант* – была равна 18).
3. Расставьте числа от 1 до 11 так, чтобы сумма трех чисел на каждом из десяти отрезков была одна и та же (рис. 4).

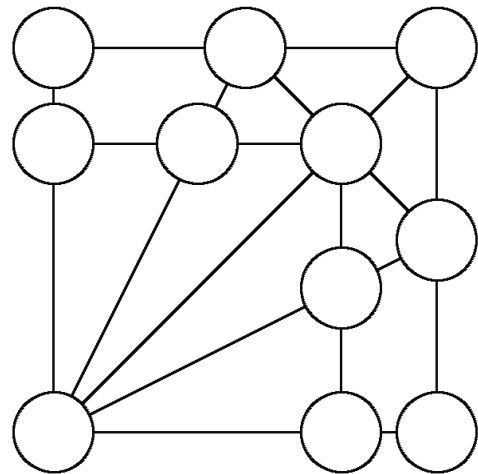


Рис. 5

Сколько различных решений имеет эта задача? Что в них общего и чем они отличаются?

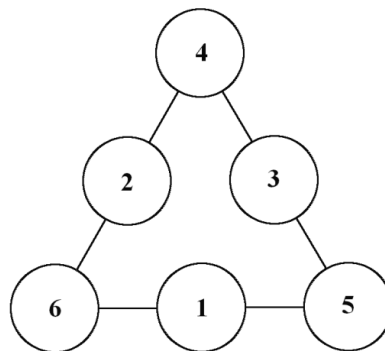


Рис. 6

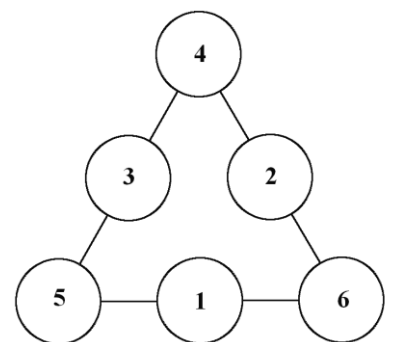


Рис. 7

	<i>Рис. 8</i>	<i>Рис. 9</i>
	<i>Рис. 9</i>	<i>Рис. 10</i>
	Задача имеет шесть различных решений (рис. 5-10). Эти решения получаются один из другого с помощью движений, переводящих правильный треугольник сам в себя. Но это также совсем другая история ...	

В заключение статьи можно отметить, что приведенный метод решения задач, несмотря на свою эффективность, в принципе является достаточно простым универсальным и может быть легко адаптирован для применения как в рамках других учебных предметов, так и для решения произвольных задач в целом. Кроме того, использование такого подхода позволяет развить критическое восприятие, а также навыки логического мышления, которые являются крайне востребованными в процессе школьного обучения, а также остаются таковыми и в течение всей жизни.

Литература

1. Керова Г. В. Нестандартные задачи по математике. 1–4 классы. – М.: ВАКО, 2015. – 240 с. – (Мастерская учителя).
2. Пойа Д. Как решать задачу / Д. Пойа. – М.: гос. уч.-пед. изд-во министерства просвещения РСФСР, 1959. – 207 с.
3. Распоряжение Правительства РФ № 2506-р от 24 декабря 2013 г. «Концепция развития математического образования в Российской Федерации».